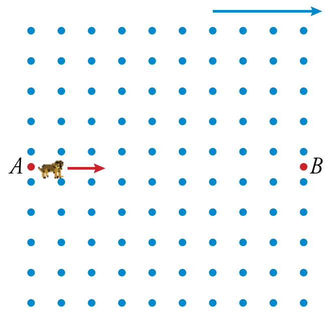
Resol

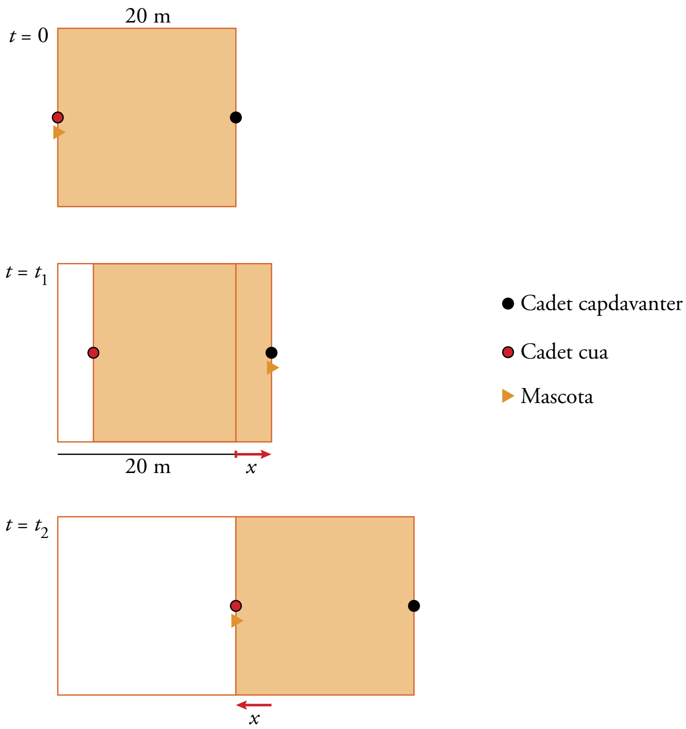
Pàgina 73

Els cadets que desfilen amb la seva mascota

Una companyia de cadets, formada en quadre de 20 metres de costat, avança amb pas regular. La mascota de la companyia, un gos petit, parteix del centre de l'última fila, punt *A*, camina en línia recta fins al centre de la primera fila, punt *B*, i torna de la mateixa manera fins al centre de l'última fila. En el moment de tornar a arribar a *A*, els cadets han recorregut exactament 20 metres. Suposant que el gos camina amb velocitat constant i que no perd temps en els girs, quants metres ha recorregut?



Representem esquemàticament el moviment de la mascota i dels cadets:



Anomenarem x l'espai que recorre el soldat capdavanter fins que la mascota l'atrapa, i farem servir la fórmula $temps = \dfrac{espai}{velocitat}$.

El temps que tarda la mascota a arribar fins al soldat capdavanter, t_1, és el mateix que el que tarda el soldat a recórrer els x metres.

Anomenem $v_{mascota}$ la velocitat de la mascota i v_{cadet} la velocitat dels cadets.

L'avantatge del cadet capdavanter és de 20 m.

t_1 = temps que tarda la mascota a arribar fins al cadet capdavanter

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadet}}$$

t_1 = temps que tarda el cadet capdavanter a recórrer els x metres

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadet}}$$

Aleshores tenim la igualtat:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadet}} = \frac{x}{v_{cadet}}$$

L'espai recorregut per la mascota quan avança amb els cadets és $20 + x$. L'espai recorregut per la mascota en tornar és x, ja que que al final es queda a 20 m del principi. Per tant, l'espai total recorregut per la mascota és $e = 20 + 2x$.

El temps total durant el qual avança la companyia, t_2, és el mateix que el temps en què la mascota està corrent.

t_2 = temps total durant el qual avança la companyia

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadet}}$$

t_2 = temps total durant el qual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Aleshores tenim la igualtat:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadet}} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadet}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operem en la igualtat I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadet}) = 20 \cdot v_{cadet} \rightarrow x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadet} + xv_{cadet} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot v_{mascota} = v_{cadet}(20 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{mascota} = v_{cadet}\frac{(20 + x)}{x} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadet}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hem obtingut la raó entre les dues velocitats. Utilitzem aquesta relació en la igualtat II i obtenim:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operem i obtenim:

$$2x^2 = 400 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

L'espai recorregut per la mascota és $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 Polinomis. Factorització

Pàgina 75

1 Descompon factorialment els polinomis següents:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

	1	–9	24	–20
2		2	–14	20
	1	–7	10	0
2		2	–10	
	1	–5	0	

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)^2\,(x - 5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

	1	–3	–3	–5	2	8
2		1	–2	–5	–10	–8
	1	–2	–5	–10	–8	0
–1		–1	3	3	8	
	1	–3	–2	–8	0	
4		4	4	8		
	1	1	2	0		

$x^2 + x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no té solució)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 4)\,(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

	1	6	9	0	–1	–6	–9
–1		–1	–5	–4	4	–3	9
	1	5	4	–4	3	–9	0
–3		–3	–6	6	–6	9	
	1	2	–2	2	–3	0	
–3		–3	3	–3	3		
	1	–1	1	–1	0		
1		1	0	1			
	1	0	1	0			

$x^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -1$ (no té solució)

Així, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x + 3)^2\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\
2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\
\hline
 & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -4 & -4 & 3 & \\
\hline
 & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2},\; x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4\,(x-2)\,(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

2 **a) Intenta factoritzar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Fes-ho ara sabent que és divisible per $x^2 + x + 1$

a) El polinomi donat no té arrels enteres (de fet, no té arrels reals).

b) Fem la divisió:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,4x^3 & +\,8x^2 & +\,7x & +\,4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -\;\;x^3 & -\;\;x^2 & & & x^2 + 3x + 4 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & +\,7x^2 & +\,7x & +\,4 & \\
 & -3x^3 & -\,3x^2 & -\,3x & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & +\,4x & +\,4 & \\
 & & -4x^2 & -\,4x & -\,4 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Els polinomis $x^2 + x + 1$ i $x^2 + 3x + 4$ són irreductibles (les equacions $x^2 + x + 1 = 0$ i $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tenen solució).

Per tant:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)\,(x^2 + 3x + 4)$$

3 **Intenta factoritzar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Torna a intentar-ho sabent que $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ són arrels seves.**

El polinomi donat no té arrels enteres.

Tenint en compte la dada addicional (que $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ són arrels), procedim així:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\
-1/2 & & -3 & -2 & -2 & 1 \\
\hline
 & 6 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0} \\
1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\
\hline
 & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$6x^2 + 6x + 6 = 0$

$6(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ (no té solució)

Per tant:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6\,(x^2 + x + 1) = (2x+1)\,(3x-1)\,(x^2 + x + 1)$$

2 Fraccions algebraiques

Pàgina 77

4 Cert o fals?

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x-3}{x^2-1}=\dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{x+1}{x}-1=\dfrac{1}{x}$

a) Per comprovar si són equivalents, multipliquem en creu: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, aleshores és fals.

b) Per comprovar si són equivalents, multipliquem en creu: $(x-1)(x+1) = x^2-1$, aleshores és cert.

c) La primera fracció és el triple de $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, i la segona és el triple de $\dfrac{1}{x+1}$, que són les fraccions de l'apartat anterior, aleshores és cert.

d) Operem en el membre de l'esquerra:

$$\frac{x+1-x}{x}=\frac{1}{x}$$

Obtenim el membre de la dreta, aleshores és cert.

5 Redueix prèviament a comú denominador les fraccions algebraiques següents, i suma-les:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x \\ x^2+x=x(x+1) \\ x+1=x+1 \end{array}\right\} \text{ mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reduïm a comú denominador:

$$\frac{x+7}{x}=\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1}=-\frac{(2x+1)x}{x(x+1)}=-\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=-\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Les sumem:

$$\frac{x+7}{x}+\frac{x-2}{x^2+x}-\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}+\frac{x-2}{x(x+1)}+\frac{-2x^2-x}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x}=\frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

6 Calcula:

a) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}$

b) $\frac{x}{x+1}+5x$

a) $$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

b) $$\frac{x}{x+1}+5x=\frac{x+5x(x+1)}{x+1}=\frac{x(5x+6)}{x+1}=\frac{5x^2+6x}{x+1}$$

7 Efectua aquestes operacions:

a) $\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}$

b) $\frac{x^2-2x+3}{x-2}:\frac{2x+3}{x+5}$

a) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}=\frac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=\frac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$$

b) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}:\frac{2x+3}{x+5}=\frac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)}=\frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$$

8 Calcula:

a) $\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right)$

b) $\frac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $$\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{x+2}{x}:\frac{(x-1)(2x+1)}{3x}=\frac{(x+2)\,3x}{x(x-1)(2x+1)}=\frac{3(x+2)}{(2x+1)(x-1)}$$

b) $$\frac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^4+x^2}{x^4}=\frac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)\,x^4}=\frac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4}=\frac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)\,x^4}=x^2-1$$

3 Resolució d'equacions

Pàgina 78

Practica

Resol:

a) $x^2 + x - 6 = 0$ **b)** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 3x + 3 = 0$

d) $3x^2 - 12 = 0$ **e)** $2x^2 + 10x = 0$ **f)** $x^2 = 121$

a) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \to x_1 = 2,\ x_2 = -3$

b) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \to x = 1$

c) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \to$ No hi ha solució.

d) $x = \pm\sqrt{\dfrac{12}{3}} = \pm 2 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x(x+5) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -5$

f) $x = \pm\sqrt{121} = \pm 11 \to x_1 = 11,\ x_2 = -11$

Practica

Resol:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ **c)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

d) $3x^4 - 36x^2 = 0$ **e)** $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ **f)** $x^4 - 18x^2 = 0$

a) $y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \to y_1 = 4,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2;\ x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} \to y_1 = 9,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3;\ x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \to x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

c) $y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-36}}{2} \to$ No hi ha solució.

d) $3x^2(x^2 - 12) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{12},\ x_3 = \sqrt{12}$

e) $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

f) $x^2(x^2 - 18) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{18},\ x_3 = \sqrt{18}$

Practica

Resol:

a) $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-5}{x}$ **b)** $\dfrac{3+x}{x-1} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{-x}{x+1} + \dfrac{2x+1}{2x} + \dfrac{1}{x^2-1} = 0$ **d)** $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x+2}{x+1}$

a) Reduïm a comú denominador i multipliquem per x^2.

$x(3x-2) - 4 = x(2x-5) \to 3x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 5x \to$

$\to 3x^2 - 2x - 4 - (2x^2 - 5x) = 0 \to$

$\to x^2 + 3x - 4 = 0 \to x = -4,\ x = 1$

Comprovades les solucions sobre l'equació inicial, es veu que ambdues són vàlides.

Solucions: $x_1 = -4,\ x_2 = 1.$

b) Reduïm a comú denominador i multipliquem per $x^2 - 1$.

$(3 + x)(x + 1) + 5(x - 1) = x - 2 \;\rightarrow\; x^2 + 9x - 2 = x - 2 \;\rightarrow\; x = -8,\; x = 0$

Comprovades les solucions sobre l'equació inicial, podem veure que ambdues són vàlides.

Solucions: $x_1 = -8,\; x_2 = 0$.

c) Reduïm a comú denominador i multipliquem per $2x(x^2 - 1)$.

$2x(x - 1)(-x) + (2x + 1)(x^2 - 1) + 2x = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{1}{3}};\; x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

Comprovades les solucions sobre l'equació inicial, es veu que ambdues són vàlides.

Solucions: $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}},\; x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

d) Reduïm a comú denominador i multipliquem per $x(x + 1)$.

$x^2 - (x + 1) = x(3x + 2) \;\rightarrow\; x^2 - (x + 1) - x(3x + 2) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 - 3x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{2},\; x = -1$

La solució $x = -1$ no és possible perquè fa 0 el denominador. L'única solució és $x = -\frac{1}{2}$.

Página 79

Practica

Resol:

a) $\sqrt{4x + 9} - \sqrt{2x + 1} = 2$

b) $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{1 - x} = 1$

a) Aïllem una de les dues arrels.

$\sqrt{4x + 9} = \sqrt{2x + 1} + 2$

Elevem al quadrat ambdós membres.

$(\sqrt{4x + 9})^2 = (\sqrt{2x + 1} + 2)^2 \;\rightarrow\; 4x + 9 = 2x + 4\sqrt{2x + 1} + 5$

Aïllem el terme en què hi ha l'arrel.

$4\sqrt{2x + 1} = 4x + 9 - 2x - 5$

Elevem al quadrat ambdós membres.

$(4\sqrt{2x + 1})^2 = (4x + 9 - 2x + 5)^2 \;\rightarrow\; 32x + 16 = 4x^2 + 16x + 16 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 32x + 16 - (4x^2 + 16x + 16) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 4,\; x_2 = 0$

Comprovació:

$x_1 = 4 \;\rightarrow\; \sqrt{4 \cdot 4 + 9} - \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 5 - 3 = 2$ es vàlida.

$x_2 = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{4 \cdot 0 + 9} - \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 2$ es vàlida.

b) Aïllem una de les dues arrels.

$\sqrt{3x + 4} = 1 + \sqrt{1 - x}$

Elevem al quadrat ambdós membres.

$(\sqrt{3x + 4})^2 = (1 - \sqrt{1 - x})^2 \;\rightarrow\; 3x + 4 = 2\sqrt{1 - x} - x + 2$

Aïllem el terme en què hi ha l'arrel.

$2\sqrt{1 - x} = -x + 2 - (3x + 4)$

Elevem al quadrat ambdós membres.

$(2\sqrt{1-x})^2 = (-x+2-(3x+4))^2 \rightarrow 4 - 4x = 16x^2 + 16x + 4 \rightarrow$

$\rightarrow 16x^2 + 16x + 4 - 4 + 4x = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{5}{4};\ x_2 = 0$

Comprovació:

$x_1 = -\frac{5}{4} \rightarrow \sqrt{3 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 4} - \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = -1$ no és vàlida.

$x_2 = 0 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 0 + 4} - \sqrt{1-0} = 1$ és vàlida.

Hi ha una solució: $x = 0$.

Practica

Resol:

a) $\mathbf{2^{x^2-4x} = \frac{1}{16}}$ **b)** $\mathbf{5^{x^2-1} = 7}$ **c)** $\mathbf{3^{x+2} - 3^x = 72}$

a) $2^{x^2-4x} = \frac{1}{2^4} \rightarrow x^2 - 4x = 4 \rightarrow x_1 = 2\sqrt{2} + 2;\ x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$

b) $log(5^{x^2-1}) = log\,7 \rightarrow (x^2 - 1)log\,5 = log\,7 \rightarrow (x^2 - 1) = \frac{log\,7}{log\,5} = 1{,}2091 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 1 + 1{,}2091 = 2{,}2091 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{2{,}2091} = \pm\ 1{,}4863 \rightarrow x_1 = 1{,}4863;\ x_2 = -1{,}4863$

c) Fem el següent canvi de variable: $3^x = y$

$3^2y - y = 72 \rightarrow y = 9 = 3^2$

$3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$

Pàgina 80

Practica

Resol:

a) $\boldsymbol{log\,x - log\,4 = 2}$

b) $\boldsymbol{3\,log_5\,(x-1) = log_5\,125}$

c) $\boldsymbol{2\,ln\,x = ln\,(2x+3)}$

(Recorda: *ln* és logaritme neperià o logaritme en base *e*.)

a) $log\,x - log\,4 = 2 \rightarrow log\,\frac{x}{4} = log\,100 \rightarrow \frac{x}{4} = 100 \rightarrow x = 400$

La solució és vàlida.

b) $3log_5(x-1) = log_5\,125 \rightarrow log_5(x-1)^3 = log_5\,125 \rightarrow (x-1)^3 = 125 \rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{125} = 5 \rightarrow x = 6$

La solució és vàlida.

c) $2ln\,x = ln\,(2x+3) \rightarrow ln\,x^2 = ln\,(2x+3) \rightarrow x^2 = (2x+3) \rightarrow x_1 = 3$ es vàlida; $x_2 = -1$ no és vàlida perquè no es pot fer $ln\,(-1)$.

9 **Cert o fals?**

a) En resoldre una equació amb algun radical quadràtic sempre apareix alguna arrel falsa.

b) 4 i −4 són solucions de l'equació $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=4$.

c) 4 i −4 són solucions de l'equació $\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=2$.

a) Fals. Hem resolt equacions d'aquest tipus en les quals totes les solucions eren vàlides.

Exemple: $\sqrt{4x+9}-\sqrt{2x+1}=2$ a la pàgina 79.

b) Cert. Si substituïm x per 4 o per −4, obtenim una igualtat.

c) Fals. Només és solució $x = 4$. En substituir x per −4 no surt cap igualtat.

10 **Resol les equacions següents:**

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ **c)** $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **d)** $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \rightarrow y = 4,\ y = -3$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 - 8y - 9 = 0 \rightarrow y = 9,\ y = -1$

Solucions: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 + 10y + 9 = 0 \rightarrow y = -1,\ y = -9$

Solucions: No n'hi ha.

d) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y = 2,\ y = -1$

Solucions: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

11 **Resol les equacions següents:**

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{x}+\frac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$ **c)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$

d) $\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=3$ **e)** $\frac{5}{x+2}+\frac{x}{x+3}=\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{26}{35}$

a) $10(x + 3) + 10x = 3x(x + 3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \frac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x - 2) + 2x(x + 1) = 12x(x - 2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \frac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{-2}{3}$

d) $x(x + 1) + 2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

e) $10(x + 3) + 2x(x + 2) = 3(x^2 + 5x + 6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ x_2 = -4$

f) $35(x + 3)(x + 1) - 35(x^2 + 1) = 26(x^2 - 1)$

$35(x^2 + 4x + 3) - 35(x^2 + 1) = 26(x^2 - 1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ x_2 = \dfrac{-8}{13}$

12 **Resol:**

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

f) $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3;\ x^2 - 4x + 4 = 0;\ x = 2$ (no val)

No té solució.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x + 7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$$x^2 - 116x + 228 = 0;\ x = \frac{116 \pm 12}{2} = \begin{cases} 114 \\ 2 \rightarrow \text{(no val)} \end{cases}$$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2;\ x = x^2 + 4 - 4x;\ 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \rightarrow \text{(no val)} \end{cases}$$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x};\ 4 + x^2 - 4x = x;\ x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \rightarrow \text{(no val)} \\ 1 \end{cases}$$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8 - 2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} = \begin{cases} 2 \\ 0{,}08 \rightarrow \text{(no val)} \end{cases}$$

Així, $x = 2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$(\sqrt{5x+1})^2=(\sqrt{27+3x}-2)^2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$(4\sqrt{3x+27})^2=(-2x+30)^2$

$16(3x+27)=4x^2-120\,x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \rightarrow x=39,\ x=3$

Comprovació:

$x=39 \rightarrow \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \rightarrow 14+2\neq 12 \rightarrow$ (no val)

$x=3 \rightarrow \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \rightarrow 4+2=6$

13 **Resol:**

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$ **c)** $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}}=186$ **d)** $7^{x+2}=5\,764\,801$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2};\ 3x=-3x-2;\ 6x=-2;\ x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^4-x^2=3^{-2};\ 4-x^2=-2;\ x^2=6;\ x=\pm\sqrt{6}$

$x_1=\sqrt{6};\ x_2=-\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=186;\ 2^{2x-2-x-2}=186;\ 2^{x-4}=186$

$log\,2^{x-4}=log\,186;\ (x-4)\,log\,2=log\,186$

$x=4+\dfrac{log\,186}{log\,2}=11{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8;\ x=6$

14 **Resol les equacions següents:**

a) $3^x+3^{x+2}=30$ **b)** $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\dfrac{31}{5}$

c) $2\,log\,x-log\,(x+6)=3\,log\,2$ **d)** $4\,log_2\,(x^2+1)=log_2\,625$

a) $3^x+3^x\cdot 9=30$

$3^x(10)=30;\ 3^x=3;\ x=1$

b) $5\cdot 5^x+5^x+\dfrac{5^x}{5}=\dfrac{31}{5}$

$5^x\cdot\dfrac{31}{5}=\dfrac{31}{5};\ x=0$

c) $log\,\dfrac{x^2}{x+6}=log\,8$

$x^2=8x+48;\ x^2-8x-48=0;\ x=\dfrac{8\pm 16}{2}=\begin{cases}12\\-4 \rightarrow \text{(no val)}\end{cases}$

$x=12$

d) $log_2(x^2+1)4=log_2\,5^4;\ x^2+1=5;\ x^2=4;\ x=\pm 2$

$x_1=2;\ x_2=-2$

4 Resolució de sistemes d'equacions

Pàgina 82

15 Cert o fals?

a) El sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ **té dues solucions:** $x = 4,\ y = 1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ **només té dues solucions:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1]$ **y** $[x_2 = -2,\ y_2 = -1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ **té quatre solucions:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1];\ [x_2 = 2,\ y_2 = -1]$

$[x_3 = -2,\ y_3 = 1];\ [x_4 = -2,\ y_4 = -1]$

a) Fals; $x = 4$ e $y = 1$ no són dues solucions, sinó una solució per a cada incògnita; per tant són una solució del sistema.

b) Fals; com que les dues incògnites estan al quadrat, també són solucions $x_3 = -2,\ y_3 = 1$ y $x_4 = 2,\ y_4 = -1$.

c) Cert, pel raonament de l'apartat anterior.

16 Resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 16 \\ \sqrt{5 - 4y} - x = -(x + y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{array}\right\}$

$x^2 - 9 = 2x - 1;\ x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ y_1 = 7$

$x_2 = -2;\ y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$

$y = 5 - x$

$x(5 - x) = 6;\ 5x - x^2 = 6;\ x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ y_1 = 3$

$x_2 = 3;\ y_2 = 2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y-1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \rightarrow x = 17$

$y = 0$ (no val)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \left\langle \begin{array}{l} y = 1 \rightarrow \text{(no val)} \\ y = -5 \end{array} \right.$

$25 - x^2 = 16 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

17 Resol:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} log\,(x^2 + y) - log\,(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ log\, x - 1 = log\, y \end{cases}$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{array} \right.$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} log\,\dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \left\langle \begin{array}{l} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{array} \right.$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

d) $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + \log 10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \log(2x - y^2) = \log 10(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 10(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;\ \ y(y - 4) = 0;\ \ y = 4,\ \ y = 0$

$y = 4$ no és vàlida perquè apareixeria $\log(-2)$ en la primera equació.

$x = 10;\ \ y = 0$

5 Mètode de Gauss per a sistemes lineals

Pàgina 83

18 **Recononeix com a escalonats i resol:**

$$\text{a)}\ \begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$$

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$$

$$\text{c)}\ \left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$$

$$\text{d)}\ \left.\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$$

19 **Resol els sistemes escalonats següents:**

$$\text{a)}\ \begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$$

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = -3 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + \quad = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$$

$$\text{c)}\ \left.\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{5 + z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 0 + 10 - 3 = 15 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

$$\text{d)}\ \left.\begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{3} = 3 \\ y = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$$

Pàgina 84

20 **Resol pel mètode de Gauss:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\}$ (1a), (2a) + (1a), (3a) + (1a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array}\right\}$ (1a), (2a), (3a) + (2a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array}\right\}$ (1a), (2a), (3a) + (1a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{5} = 4 \\ y = \dfrac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$

21 **Resol:**

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{array}\right\}$ (1a) + 4 · (2a), (2a), (3a) –3 · (2a) $\left.\begin{array}{l} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{array}\right\}$ 2 · (1a) + (3a), (2a), (3a) : 2

$\left.\begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$ (1a), (2a) – (1a), (3a) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ z = \dfrac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \dfrac{2x + 4z + 1}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$

Pàgina 85

22 **Intenta resoldre pel mètode de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = -2} \\ \boldsymbol{x - 2y - z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y = 0} \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = -2} \\ \boldsymbol{x - 2y - z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y = 1} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

Les equacions 2a i 3a diuen coses contradictòries (si $2x - y$ és igual a 1, no pot ser igual a 2). Per tant, el sistema és incompatible.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$

Només queden dues equacions. Resolem el sistema obtenint y, z en funció de x:

(2a) $\rightarrow y = 2x - 1$

(1a) $\rightarrow z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Solucions: $\left\{\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{array}\right.$

Per cada valor de x, s'obté una solució del sistema. Per exemple:

Per a $x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$ Per a $x = -2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{array}\right.$

23 **Resol:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y + 4z = 8} \\ \boldsymbol{x + y - z = 2} \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y + 4z = 8} \\ \boldsymbol{x + y - z = 1} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (3a) \\ (3a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 10 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 3 \cdot (1a) \\ (3a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$

La segona equació és absurda. No pot ser 0 = 1. Per tant, el sistema no té solució.

b) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (3a) \\ (3a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 3 \cdot (1a) \\ (3a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$

La segona equació no diu res. No és una equació. Per tant, només queden dues equacions: la 1a i la 3a.

Resolem el sistema resultant donant els valors de x i y en funció de z:

$\left\{\begin{array}{l} x + z = 3 \rightarrow x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \rightarrow y = 1 - x + z = 1(3 - z) + z = -2 + 2z \end{array}\right.$

Solucions: $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{array}\right.$

Per a cada valor que donem a z, s'obté una solució del sistema. Per exemple:

Per a $z = 0 \rightarrow x = 3,\ y = -2$.

Per a $z = 4 \rightarrow x = -1,\ y = 6$.

6 Inequacions i sistemes d'inequacions amb una incògnita

Pàgina 86

24 **Resol aquestes inequacions:**

a) $3x - 2 \leq 10$ **b)** $x - 2 > 1$ **c)** $2x + 5 \geq 6$ **d)** $3x + 1 \leq 15$

a) $3x - 2 \leq 10 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$

Solucions: $\{x \mid x \leq 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Solucions: $\{x \mid x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \geq 6 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Solucions: $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \leq 15 \rightarrow 3x \leq 14 \rightarrow x \leq \frac{14}{3}$

Solucions: $\left\{x \mid x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

25 **Resol aquests sistemes d'inequacions:**

a) $\begin{cases} 3x - 2 \leq 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

Observem que les inequacions que formen ambdós sistemes s'han resolt en l'exercici anterior.

a) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Solucions:* $\{x \mid 3 < x \leq 4\} = (3, 4]$

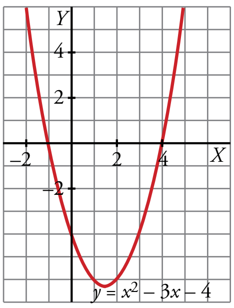
b) $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{14}{3} \end{cases}$ *Solucions:* $\left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

Pàgina 87

26 **Resol les inequacions següents:**

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ **c)** $x^2 + 7 < 0$ **d)** $x^2 - 4 \leq 0$

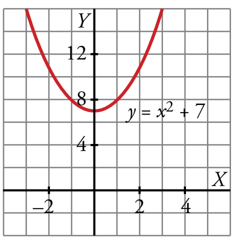
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ interval $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

c)



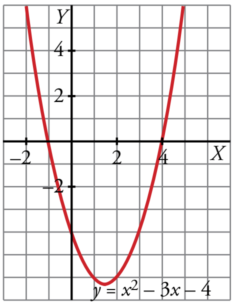
$x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No té solució.

d) $x^2 - 4 \leq 0$

La paràbola $y = x^2 - 4$ queda per sota de l'eix X en l'interval $(-2, 2)$; i talla l'eix X en $x = -2$ i en $x = 2$. Per tant, les solucions de la inequació són els punts de l'interval $[-2, 2]$.

27 Resol els sistemes d'inequacions següents:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a) 

$2x - 7 > 5 \;\rightarrow\; 2x > 12 \;\rightarrow\; x > 6 \;\rightarrow\; (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solució: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{array}\right\}$

- Les solucions de la primera inequació són els punts de l'interval [–2, 2]. (Vegeu apartat d) de l'exercici anterior).
- Les solucions de la segona inequació són:

$$x - 4 > 1 \;\rightarrow\; x > 5 \;\rightarrow\; (5, +\infty)$$

- Les solucions del sistema seran els punts en comú dels dos intervals. Per tant, el sistema no té solució.

7 Inequacions lineals amb dues incògnites

Pàgina 88

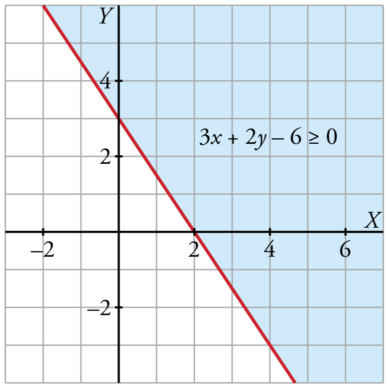
28 **Resol:**

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibuixem la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

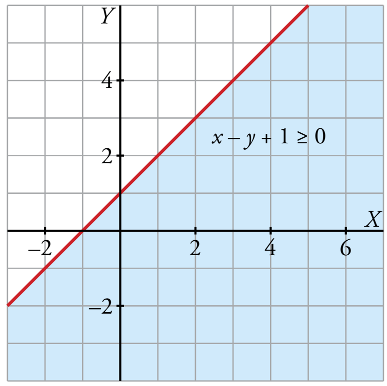
La solució és el semiplà que no conté O.



b) Dibuixem la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solució és el semiplà que conté O.



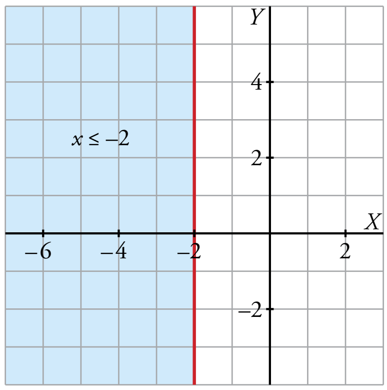
29 **Resol:**

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibuixem la recta $r: x = -2$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat: $0 + 2 \leq 0$.

La solució és el semiplà que no conté O.

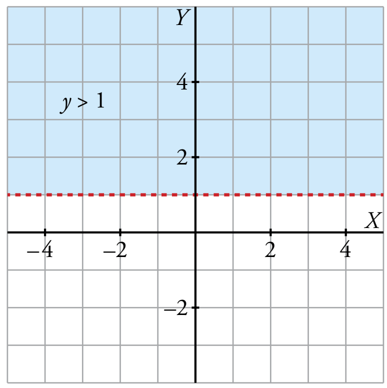


b) Dibuixem la recta $r: y = 1$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat: $0 \geq 1$.

La solució és el semiplà que no conté O.

La recta $y = 1$ no pertany al conjunt de solucions.



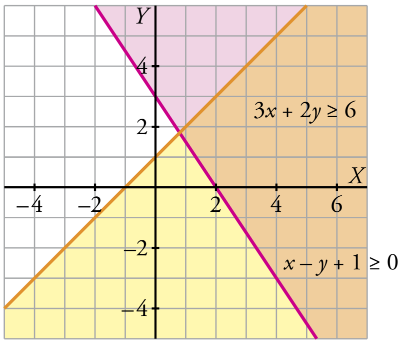
Página 89

30 **Resol els sistemes d'inequacions següents:**

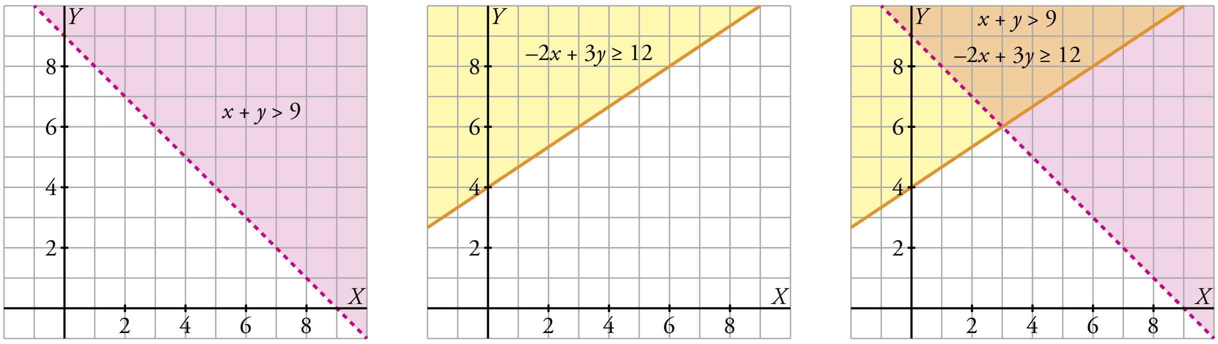
a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y > 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y < 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y < 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y > -3 \\ x + y > 11 \\ x \leq 2 \end{cases}$

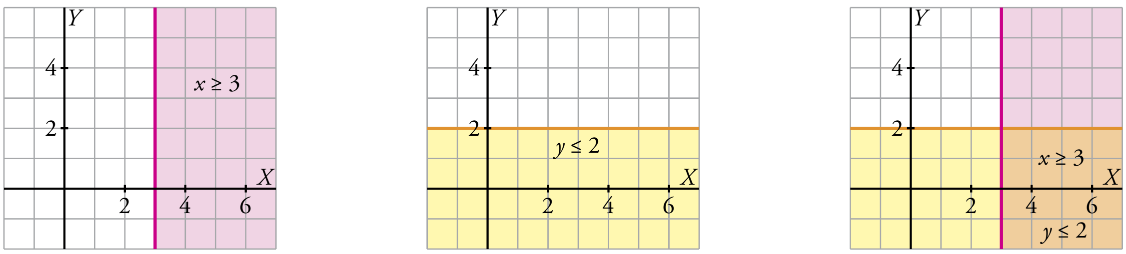
a) Ambdues inequacions han estat resoltes en l'exercici 1 anterior. La regió solució del sistema és la intersecció dels semiplans solucions d'ambdues inequacions. És a dir, és la regió de color marró.



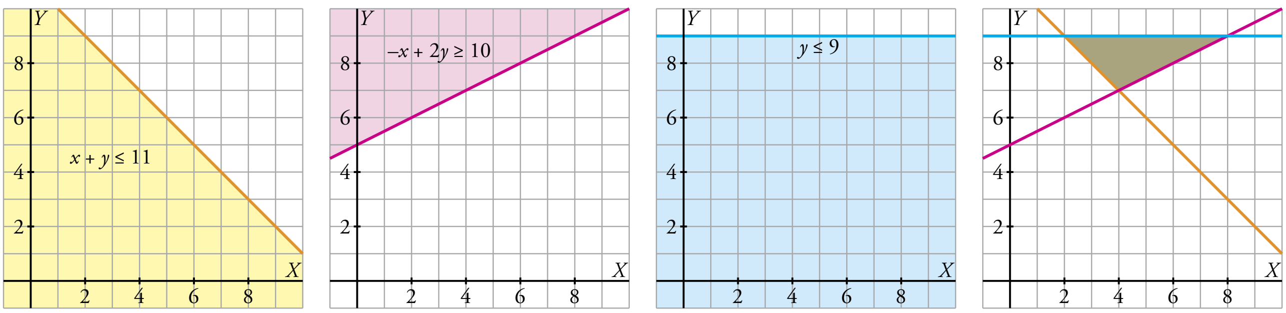
b) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és la intersecció d'ambdós semiplans. La solució és la regió marró.



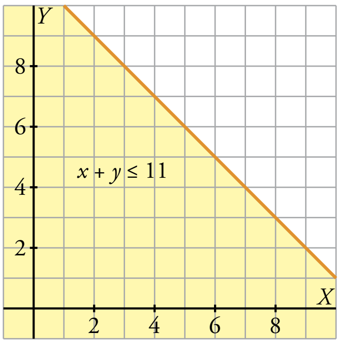
c) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és la intersecció d'ambdós semiplans. La solució és la regió marró.

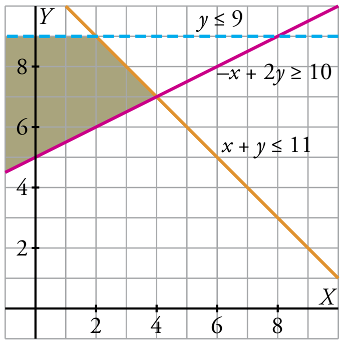


d) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és la intersecció dels semiplans. La solució és el triangle d'intersecció.

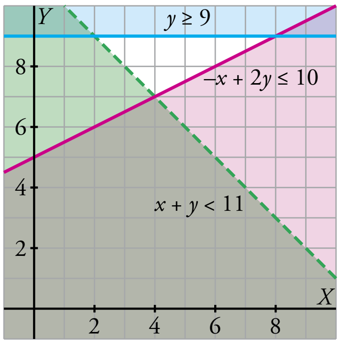


e) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és la intersecció dels tres semiplans. Els semiplans de la segona i tercera inequacions coincideixen amb els de l'apartat d). Representem el semiplà de la primera inequació. La solució és la regió comuna a les regions.

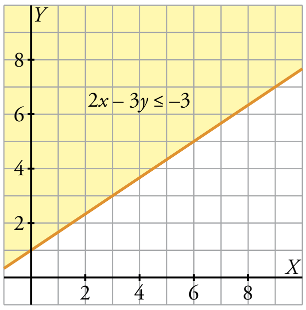


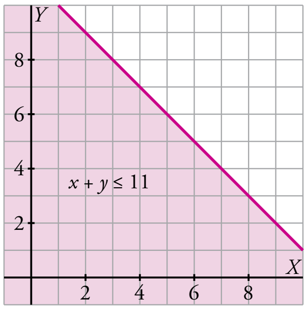


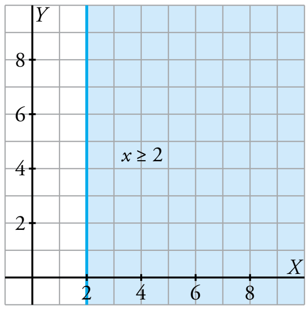
f) Resolem cada una de les inequacions. No hi ha cap punt que estigui en la intersecció dels tres semiplans. Per tant no hi ha solució.

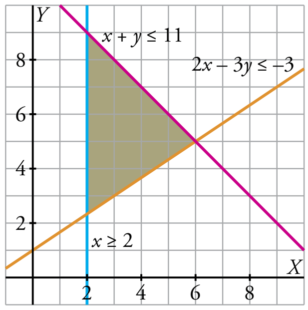


g) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és la intersecció dels tres semiplans. La solució és el triangle comú als semiplans.

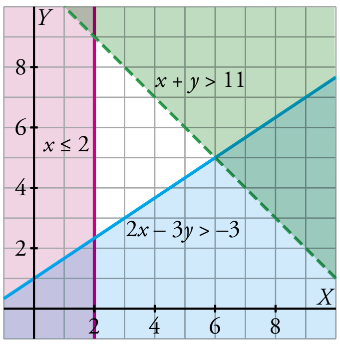








h) Resolem cada una de les inequacions. No hi ha cap punt que estigui en la intersecció dels tres semiplans. Per tant, no hi ha solució.



Exercicis i problemes resolts

Pàgina 90

1. Equacions polinòmiques de grau tres o superior

Fes-ho tu. **Resol aquesta equació:**

$$\mathbf{12x^4 + 14x^3 - 2x = 0}$$

Com que no té terme independent, traiem factor comú $2x$:

$$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$$

Busquem ara les arrels enteres del nou polinomi entre els divisors del terme independent i factoritzem.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$$

Com que no hi ha més arrels enteres, per descompondre el polinomi de segon grau resolem l'equació associada i com que el coeficient principal és 6, ens queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Solucions: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Equacions amb valors absoluts

Fes-ho tu. **Resol aquestes equacions:**

a) $\mathbf{|x^2 - 2| = 2}$ **b)** $\mathbf{|3x + 1| = |2x + 4|}$ **c)** $\mathbf{|x + 3| = |2x| + 2}$

a) Seguim les indicacions de l'exercici resolt 2, apartat a).

$x^2 - 2 = 2 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \rightarrow x_3 = 0$

b) Seguim les indicacions de l'exercici resolt 2, apartat b).

$3x + 1 = 2x + 4 \rightarrow x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \rightarrow x_2 = -1$

c) Seguim les indicacions de l'exercici resolt 2, apartat c).

$$|x + 3| = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < -3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases} \qquad |2x| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

	$x < -3$	$-3 \leq x < 0$	$x \geq 0$
$\lvert x + 3\rvert$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$
$\lvert 2x\rvert$	$-2x$	$-2x$	$2x$
$\lvert 2x\rvert + 2$	$-2x + 2$	$-2x + 2$	$2x + 2$

$x < -3$	$-3 \leq x < 0$	$x \geq 0$
$-x - 3 = -2x + 2$	$x + 3 = -2x + 2$	$x + 3 = 2x + 2$
$x = 5 \notin (-\infty, -3)$	$x = -1/3 \in [-3, 0)$	$x = 1 \in [0, +\infty)$

Solucions: $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 1$

Pàgina 91

3. Equacions exponencials

Fes-ho tu. **Resol aquestes equacions:**

a) $\mathbf{3^{x^2+1} - 9^x = 0}$ **b)** $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = 5}$ **c)** $\mathbf{2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0}$

a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} - (3^2)^x = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} - 3^{3x} = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} = 3^{2x}$

Igualem els exponents: $x^2 + 1 = 2x \rightarrow x = 1$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = 5$

Apliquem logaritmes als dos membres:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = \log 5 \rightarrow (-x-1)\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 5 \rightarrow (-x-1)(\log 1 - \log 2) = \log 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x-1 = \frac{\log 5}{-\log 2} \rightarrow -x = \frac{\log 5}{-\log 2} + 1 \rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} - 1$$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

Canviem de variable: $2^x = y$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 1$

$y_1 = 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1$

$y_2 = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x_2 = 0$

4. Equacions logarítmiques

Fes-ho tu. **Resol aquestes equacions:**

a) $\mathbf{\log x + \log 4 = 2}$ **b)** $\mathbf{2\log x - \log(x-1) = \log 4}$

a) $\log x + \log 4 = 2 \rightarrow \log(4x) = \log 100 \rightarrow 4x = 100 \rightarrow x = 25$, que és solució vàlida.

b) $2\log x - \log(x-1) = \log 4 \rightarrow \log\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \log 4 \rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 4 \rightarrow x = 2$, que és solució vàlida.

Pàgina 92

5. Equacions tipus $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Fes-ho tu. **Resol aquesta equació:**

$$\mathbf{x^8 - 15x^4 - 16 = 0}$$

Fem el canvi de variable: $x^4 = y$

L'equació queda: $y^2 - 15y - 16 = 0 \rightarrow y_1 = 16,\ y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existeix.

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

6. Inequacions amb fraccions algebraiques

Fes-ho tu. Resol aquesta inequació:

$$\frac{x-1}{x} \le x$$

$$\frac{x-1}{x} - x = \frac{-x^2+x-1}{x} \le 0$$

Resolem les dues equacions associades:

$-x^2 + x - 1 = 0$ no té solució; per tant, sempre té el mateix signe

$x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$-x^2+x-1$	$-$	$-$
x	$-$	$+$
$\frac{-x^2+x-1}{x}$	$+$	$-$

El valor 0 no es pot incloure en la solució perquè anul·la el denominador. La solució és $(0, +\infty)$.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 93

1. Sistemes d'equacions no lineals

Resol els sistemas d'equacions següents:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{2x} - 3^{y-1} = 61 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 3\ln x - \ln y = 1 \\ \ln x^3 + \ln y^2 = 7 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = \dfrac{3y^2+1}{9} \end{cases}$

a) Fem el canvi de variable $2^x = z,\ 3^y = t$.

El sistema queda:

$\begin{cases} z + t = 17 \\ z^2 - \dfrac{t}{3} = 61 \end{cases}$ les solucions del qual són: $z = 8,\ t = 9;\ z = -\dfrac{25}{3}, t = \dfrac{76}{3}$

$z = 8,\ t = 9 \rightarrow 2^x = 2^3,\ 3^y = 3^2 \rightarrow x = 3,\ y = 2$

$z = -\dfrac{25}{3}, t = \dfrac{76}{3} \rightarrow 2^x = -\dfrac{25}{3}$ No és vàlida perquè $2^x > 0$ sempre.

Solució: $x = 3,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 3\ln x - \ln y = 1 \\ \ln x^3 + \ln y^2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\ln x - \ln y = 1 \\ 3\ln x + 2\ln y = 7 \end{cases}$

Restem la 2a equació de la 1a equació: $-3\ln y = -6 \rightarrow \ln y = 2 \rightarrow y = e^2$

Sumem la 2a equació més el doble de la 1a: $9\ln x = 9 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$

Solució: $x = e,\ y = e^2$

c) $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = \dfrac{3y^2+1}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = \dfrac{3y^2+1}{3^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = 3^{y^2+1-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = 3^{y^2-1} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x - 1 = y^2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = 1,\ y_2 = -1$

2. Plantejament i resolució d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites

Per fabricar una llauna de conserves cilíndrica de capacitat $48\pi\ cm^3$, es necessiten $56\pi\ cm^2$ de xapa. Calcula les dimensions de la llauna de conserves.

$\begin{cases} \pi r^2 h = 48\pi \\ 2\pi r^2 + 2\pi rh = 56\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r^2 h = 48 \rightarrow h = \dfrac{48}{r^2} \\ 2r^2 + 2rh = 56 \end{cases}$

$2r^2 + 2r\dfrac{48}{r^2} = 56 \rightarrow 2r^2 + 2r\dfrac{48}{r^2} - 56 = 0 \rightarrow \dfrac{96}{r} + 2r^2 - 56 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2(r^3 - 28r + 48)}{r} = 0 \rightarrow (r^3 - 28r + 48) = 0 \rightarrow r = 4,\ r = 2,\ r = -6$ (no és vàlida)

Solucions: $r_1 = 4 \rightarrow h_1 = \dfrac{48}{16} = 3;\ r_2 = 2 \rightarrow h_2 = \dfrac{48}{4} = 12$

3. Plantejament i resolució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites

En un grup de 1r de Batxillerat tots tenen com a matèria de modalitat Biologia, Dibuix o Tecnologia. Les matrícules en Biologia representen el 60 % del total. Si tres alumnes de Dibuix s'haguessin matriculat en Tecnologia, aleshores les dues assignatures tindrien el mateix nombre d'estudiants. Finalment, el doble de la diferència del nombre de matriculats en Biologia i en Dibuix és el triple de la diferència dels matriculats en Dibuix i en Tecnologia. Troba el nombre d'estudiants matriculats en cada una de les matèries.

$$\begin{cases} x-0,6x-0,6y-0,6z=0 \\ y-z=6 \\ 2x-2y-3y+3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,4x-0,6y-0,6z=0 \\ y-z=6 \\ 2x-5y+3z=0 \end{cases}$$

Multipliquem la 1a equació per 5:

$$\begin{cases} 2x-3y-3z=0 & \text{(1a)} \\ \quad\;\; y-\;z=6 & \text{(2a)} \\ 2x-5y+3z=0 & \text{(3a)}-\text{(1a)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y-3z=0 & \text{(1a)} \\ \quad\;\; y-\;z=6 & \text{(2a)} \\ \quad -2y+6z=0 & \text{(3a)}+2\cdot\text{(1a)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y-3z=0 \\ \quad\;\; y-\;z=6 \\ \qquad\quad 4z=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=9 \\ z=3 \end{cases}$$

Solució: $x=18$ de biologia, $y=9$ de dibuix, $z=3$ de tecnologia.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 94

Per practicar

Factorització

1 **Descompon en factors aquests polinomis i digues quines són les seves arrels:**

a) $9x^4 - x^2$ **b)** $4x^2 - 28x + 49$ **c)** $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

d) $2x^3 - x^2 - x$ **e)** $x^4 - 13x^2 + 36$ **f)** $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $9x^4 - x^2 = x^2(9x^2 - 1) = x^2(3x - 1)(3x + 1)$

Arrels: $x = 0,\ x = \frac{1}{3},\ x = -\frac{1}{3}$

b) $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$

Arrel: $x = \frac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & x+3 \\ x^2 + 6x + 9 & x+3 \\ x + 3 & x+3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

Arrel: $x = -3$

d)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - x & x \\ 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \\ 1 & \end{array}$$

$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(2x + 1)$

Arrels: $x = 0,\ x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 13x^2 + 36 & x - 2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ x^2 - 9 & x - 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$

Arrels: $x = 2,\ x = -2,\ x = 3,\ x = -3$

f) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

És un producte notable. No té arrels perquè $x^2 + 1$ no es pot descompondre.

2 Troba, en cada un d'aquests casos, el MCD [$A(x)$, $B(x)$] i el MCM [$A(x)$, $B(x)$]:

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x - 3)\ (x + 4)$; $B(x) = x(x - 3)\ (x + 3)$

MCD [$A(x)$, $B(x)$] $= (x - 3)$

MCM [$A(x)$, $B(x)$] $= x(x - 3)\ (x + 3)\ (x + 4)$

b) $A(x) = (x - 1)\ (x + 1)2$; $B(x) = x(x - 1)\ (x + 1)$

MCD [$A(x)$, $B(x)$] $= (x - 1)\ (x + 1)$

MCM [$A(x)$, $B(x)$] $= x(x - 1)\ (x + 1)^2$

c) $A(x) = x^2(x + 1)\ (x - 1)\ (x^2 + 1)$; $B(x) = (x - 1)\ (x^2 + 1)$

MCD [$A(x)$, $B(x)$] $= (x - 1)\ (x^2 + 1)$

MCM [$A(x)$, $B(x)$] $= x^2(x + 1)\ (x - 1)\ (x^2 + 1)$

3 Resol aquestes equacions factoritzant prèviament:

a) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0$

c) $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$

d) $x^3 - 49x = 0$

e) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$

f) $x^6 + 3x^2 = 0$

a) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = 6(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Solucions: $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$

b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0$

$$16x^5 - 8x^3 + x = 16x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Solucions: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = -\frac{1}{2}$

c) $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$

$x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = (x - 3)(x + 5)(x + 4)$

Solucions: $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = -4$

d) $x^3 - 49x = 9$

$x^3 - 49x = x(x - 7)(x + 7)$

Solucions: $x_1 = 0,\ x_2 = 7,\ x_3 = -7$

e) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$

$x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = (x - 1)(x + 5)^2$

Solucions: $x_1 = 1,\ x_2 = -5$

f) $x^6 + 3x^2 = 0$

$x^6 + 3x^2 = x^2(x^4 + 3)$

Solució: $x = 0$

Fraccions algebraiques

4 **Simplifica les fraccions següents:**

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x^2+2x-15}$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}$

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}=\dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x+2)(x+1)}=\dfrac{1}{x}\,\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)^3}{(x+2)^2}=x+2$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x+2x-15}=\dfrac{-(x+5)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)}=-x-2$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{x^2(x-2)(x+2)}{x(x+2)^2}=x\dfrac{x-2}{x+2}$

5 **Opera i simplifica el resultat.**

a) $\dfrac{3a+3}{12a-12}:\dfrac{(a+1)^2}{a^2-1}$

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)^3}\cdot\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+2}\right):\left(1+\dfrac{x}{x+2}\right)$

e) $\left(1-\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}\right):\dfrac{1}{x+2}$

a) $\dfrac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{x^2-x-x^2+2x-x}{(x-2)(x-1)}=0$

d) $\dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)}:\dfrac{x+2+x}{x+2}=\dfrac{3x+2}{x(x+2)}\cdot\dfrac{x+2}{2x+2}=\dfrac{3x+2}{x(2x+2)}=\dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

e) $\dfrac{x^2+4+4x-x^2-4x-3}{(x+2)^2}\cdot(x+2)=\dfrac{1}{x+2}$

6 **Demostra les identitats següents:**

a) $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2-1}{a^2-3a+2}:\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-a-2}=1$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-2}\right):\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\right)=2x-5$

a) $\left(\dfrac{1-x+2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\cdot\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)}:\dfrac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)}=\dfrac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)}=1$

c) $\left(\dfrac{(x-2)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-2)}\right):\left(\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}\right)=\dfrac{(x-2+x-3)(x-2-x+3)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)}=$

$=\dfrac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=2x-5$

Equacions de primer i segon grau

7 **Resol, quan sigui possible, les equacions següents:**

a) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x+2)^2$

c) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

a) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

Reduïm a comú denominador i multipliquem per 16.

$x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x - 7$

Obtenim una identitat; aleshores les solucions són tots els nombres reals.

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x+2)^2$

$0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x^2 - 2x + 1) = 1{,}25x - (0{,}25x^2 + 2x + 4)$

$-0{,}25x^2 + 0{,}7x + 0{,}35 = -0{,}25x^2 - 0{,}75x - 4$

$0{,}7x + 0{,}75x = -0{,}35 - 4$

$1{,}45x = -4{,}35$

Solució: $x = -3$

c) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

$25x^2 - 30x + 9 + 25x - 20x^2 = 5x^2 - 5x$

$9 = 0$

No té solució.

8 **Resol les equacions de segon grau següents:**

a) $0{,}5(x-1)^2 - 0{,}25(x+1)^2 = 4 - x$

b) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$

c) $0{,}\widehat{3}x^2 - x - 1{,}\widehat{3} = 0$

d) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

e) $\frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$

f) $\frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$

g) $(x-a)^2 + x(x+b) = 8b^2 - x(2a-b) + a^2$

a) $0{,}5(x^2 + 1 - 2x) - 0{,}25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$

$0{,}5x^2 + 0{,}5 - x - 0{,}25x^2 - 0{,}25 - 0{,}5x = 4 - x$

$0{,}25x^2 - 0{,}5x - 3{,}75 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3;\ x_2 = 5$

b) $\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{4} + 4 - 2x\right) - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{2x-2}{8}$

$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2;\ 3x^2 - 23x + 44 = 0$

$x = \frac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ x_2 = \frac{11}{3}$

c) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{3} - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$x_1 = 4,\ x_2 = -1$

d) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$

$0 = 2x^2 - 8;\ x^2 = 4$

$x_1 = -2;\ x_2 = 2$

e) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 13$

f) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x;\ 2x(9x - 4) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{4}{9}$

g) $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + bx = 8b^2 - 2ax + bx + a^2$

$2x^2 = 8b^2;\ x^2 = 4b^2;\ x = \pm 2b$

$x_1 = 2b;\ x_2 = -2b$

Equacions biquadrades

9 Resol les equacions següents:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ **c)** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d)** $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

a) $x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

b) $x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \text{ (no val)} \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = -1$

c) $x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \rightarrow$ No té solució

d) $x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 2\sqrt{2};\ x_4 = -2\sqrt{2}$

10 Resol:

a) $(x^2 - 2)^2 = 1$

b) $\frac{3x^4 - 1}{4} + \frac{1}{2}\left(x^4 - 2 - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{x^2 - 5}{4}$

c) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

d) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

a) $(x^2 - 2)^2 = 1 \rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 1$

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

b) $3x^4-1+2x^4-4-x^2=x^4-5$

$4x^4-x^2=0$

$x^2(4x^2-1)=0 \begin{cases} x^2=0 \\ 4x^2-1=0 \end{cases}$

$x_1=0;\ x_2=\frac{1}{2};\ x_3=-\frac{1}{2}$

c) $x^6-2x^3+1=0$

Fem el canvi de variable $x^3=y$.

$y^2-2y+1=0 \rightarrow y=1$

$x=\sqrt[3]{1}=1$

d) $x^8-15x^4-16=0$

Fem el canvi de variable $x^4=y$.

$y^2-15y-16=0 \rightarrow y=16,\ y=-1$ que no és vàlida.

$x=\pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x_1=2,\ x_2=-2$

Equacions amb fraccions algebraiques

11 Resol aquestes equacions i comprova la validesa de les solucions:

a) $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2}=0$

b) $\frac{3x-7}{x}=\frac{8x}{x+1}-5$

c) $\frac{x}{x-2}+\frac{2x}{2-x}=-x$

d) $\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}=x+2$

e) $\frac{x+7}{x+1}-\frac{7x+1}{x^2+2x+1}=x-4$

f) $\frac{30}{x^2+5x+6}-\frac{x}{x+2}=\frac{2x+1}{x+3}$

a) $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2}=0$

Reduïm a comú denominador i multipliquem per x^2.

$\frac{2x-1}{x^2}=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0$

$x=\frac{1}{2}$ és vàlida.

b) $\frac{3x-7}{x}=\frac{8x}{x+1}-5$

$\frac{3x-7}{x}-\frac{8x}{x+1}+5=0$

Reduïm a comú denominador i multipliquem per $x(x+1)$.

$\frac{(x-7)}{x(x+1)}=0 \rightarrow x-7=0 \rightarrow x=7$ es vàlida.

c) $\frac{x}{x-2}+\frac{2x}{2-x}=-x$

$\frac{x}{x-2}+\frac{2x}{2-x}+x=0$

Reduïm a comú denominador i multipliquem per $(x-2)$.

$$\frac{x(x-3)}{x-2}=0 \rightarrow x(x-3)=0$$

Solucions: $x_1=3$, $x_2=0$. Són vàlides.

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x+3}=x+2$

$$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}-x-2=0$$

Reduïm a comú denominador, simplifiquem i multipliquem per $(x+3)$.

$$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}-x-2=-\frac{(x+2)^2}{x+3}=0 \rightarrow x+2=0$$

Solució: $x=-2$, és vàlida.

e) $\dfrac{x+7}{x+1}-\dfrac{7x+1}{x^2+2x+1}=x-4$

$$\frac{x+7}{x+1}-\frac{7x+1}{x^2+2x+1}-x+4=0$$

Reduïm a comú denominador i multipliquem per $(x+1)^2$.

$$\frac{-x^3+3x^2+8x+10}{(x+1)^2}=0 \rightarrow -x^3+3x^2+8x+10=0$$

Factoritzem: $-x^3+3x^2+8x+10=-(x-5)(2x+x^2+2)$

La solució és $x=5$, que és vàlida.

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2x+1}{x+3}$

$$\frac{30}{x^2+5x+6}-\frac{x}{x+2}-\frac{2x+1}{x+3}=0$$

Reduïm a comú denominador i multipliquem per x^2+5x+6.

$$-\frac{3x^2+8x-28}{x^2+5x+6}=0 \rightarrow 3x^2+8x-28=0$$

Solucions: $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{14}{3}$. Són vàlides.

Página 95

Equacions amb radicals

12 **Resol les equacions següents i comprova les solucions:**

a) $\sqrt{5x+6}=3+2x$ **b)** $x+\sqrt{7-3x}=1$ **c)** $\sqrt{2-5x}+x\sqrt{3}=0$ **d)** $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-5}=0$

a) $5x+6=9+4x^2+12x;\ 0=4x^2+7x+3$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\frac{-7\pm1}{8}=\begin{cases}-1\\-3/4\end{cases}$$

$x_1=-1;\ x_2=-\dfrac{3}{4}$

b) $7-3x=1+x^2-2x;\ 0=x^2+x-6$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}2 \text{ (no val)}\\-3\end{cases}$$

$x=-3$

c) $2 - 5x = 3x^2;\ \ 0 = 3x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no val)} \\ -2 \end{cases}$$

$x = -2$

d) $2x + 3 = x - 5;\ \ x = -8$ (no val)

No té solució.

13 **Resol:**

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$ **b)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ **c)** $\sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{x}{8}$

a) $5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$3x - 22 = -8\sqrt{2x}$

$9x^2 + 484 - 132x = 64 \cdot 2x;\ \ 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no val)} \\ 2 \end{cases}$$

$x = 2$

b) Aïllem un radical: $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

Elevem al quadrat els dos membres:

$x - 2 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \to 6\sqrt{x+1} = 12 \to \sqrt{x+1} = 2$

Repetim el procés: $x + 1 = 4 \to x = 3$

Comprovem la solució, $\sqrt{3-2} + \sqrt{3+1} = 3$, veiem que és vàlida.

c) $\frac{7x+1}{4} = \frac{25x^2 + 49 - 70x}{36}$

$63x + 9 = 25x^2 + 49 - 70x;\ \ 0 = 25x^2 - 133x + 40$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$x = 5$

d) $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{x}{8}$

Elevem al quadrat els dos membres:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\frac{x}{8}\right)^2 \to \frac{1}{x} = \frac{1}{64}x^2 \to \frac{1}{x} - \frac{1}{64}x^2 = 0 \to -\frac{x^3 - 64}{64x} = 0 \to x^3 - 64 = 0 \to$$

$$\to x = \sqrt[3]{64} = 4, \text{ solució vàlida.}$$

14 **Resol les equacions següents:**

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$ **b)** $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x - 4$ **d)** $\sqrt[3]{4-2x} = \sqrt[6]{8x^2 - 16x}$

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$ **f)** $\sqrt[4]{3x+1} = 4 - \sqrt[4]{3x+1}$

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$(\sqrt{3x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2$

$3x = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$

$2\sqrt{2}\sqrt{x}=2x-2$

$(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2=(2x-2)^2$

$8x=4x^2-8x+4 \rightarrow x=\sqrt{3}+2,\ x=2-\sqrt{3}$ no es vàlida.

Solució: $x=\sqrt{3}+2$

b) $\sqrt{-5-7x}+\sqrt{4+x}=\sqrt{7-6x}$

$(\sqrt{-5-7x}+\sqrt{4+x})^2=(\sqrt{7-6x})^2 \rightarrow 2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4}-6x-1=7-6x$

$2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4}=8 \rightarrow (\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4})^2=4^2 \rightarrow -7x^2-33x-20=16$

Solucions: $x_1=-\dfrac{12}{7},\ x_2=-3.$ Totes dues són vàlides.

c) $\sqrt[3]{4x-1}=x-4$

Elevem al cub els dos membres:

$(\sqrt[3]{4x-1})^3=(x-4)^3 \rightarrow 4x-1=x^3-12x^2+48x-64 \rightarrow x^3-12x^2+48x-64-4x+1=0$

Factoritzem:

$x^3-12x^2+44x-63=(x-7)(x^2-5x+9)$

Solució: $x=7$ és vàlida.

d) $\sqrt[3]{4-2x}=\sqrt[6]{8x^2-16x}$

Elevem a la sisena els dos membres:

$(4-2x)^2=8x^2-16x \rightarrow 4x^2-16x+16=8x^2-16x \rightarrow 4x^2+16=0$

No té solució.

e) $\sqrt{2x+2}-\sqrt[4]{6x+10}=0$

Aïllem les arrels.

$\sqrt{2x+2}=\sqrt[4]{6x+10}$

Elevem a la quarta els dos membres:

$(2x+2)^2=4x^2+8x+4=6x+10 \rightarrow 4x^2+8x+4=6x+10 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2+2x-6=0 \rightarrow x=1,\ x=-\dfrac{3}{2}$ no és vàlida.

Solució: $x=1$

f) $\sqrt[4]{3x+1}=4+\sqrt[4]{3x+1} \rightarrow 0=4 \rightarrow$ No té solució.

Equacions exponencials i logarítmiques

15 Resol expressant ambdós membres de l'equació com a potències de la mateixa base:

a) $3^{x^2+1}=\dfrac{1}{9}$ **b)** $\dfrac{9^{2x}}{3^x}=27$ **c)** $5\cdot 2^{x+3}=\dfrac{5}{4}$ **d)** $5^{x^2+3x}=0{,}04$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{8}{27}$ **f)** $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x=81$ **g)** $(0{,}01)^x=100$ **h)** $3^{x+1}\cdot 2^{x+1}=36$

i) $\sqrt{2^{3x-1}}=0{,}125$ **j)** $3\sqrt[3]{27^{x-1}}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+5}$ **k)** $3\cdot 9^x\cdot 27^x=1$ **l)** $5^{x-5}\cdot 125^{2x}=25$

a) $3^{x^2+1}=\dfrac{1}{9} \rightarrow 3^{x^2+1}=3^{-2} \rightarrow x^2+1=-2 \rightarrow x^2=-3 \rightarrow$ No té solució.

b) $\dfrac{9^{2x}}{3^x}=27 \rightarrow \dfrac{3^{4x}}{3^x}=3^3 \rightarrow 3^{4x-x}=3^3 \rightarrow 3x=3 \rightarrow$ *Solució:* $x=1$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \frac{5}{4} \rightarrow 5 \cdot 2^{x+3} = 5 \cdot 2^{-2} \rightarrow x+3=-2 \rightarrow$ *Solució:* $x = -5$

d) $5^{x^2+3x} = 0,04 \rightarrow 5^{x^2+3x} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \rightarrow 5^{x^2+3x} = \frac{1}{25} \rightarrow 5^{x^2+3x} = 5^{-2} \rightarrow x^2+3x=-2$

Solucions: $x_1 = -1,\ x_2 = -2$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \rightarrow$ *Solució:* $x = 3$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81 \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \rightarrow$ *Solució:* $x = -2$

g) $(0{,}01)^x = 100 \rightarrow (0{,}01)^x = 0{,}01^{-2} \rightarrow$ *Solució:* $x = -2$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36 \rightarrow 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^2 \rightarrow 6^{x+1} = 6^2 \rightarrow x+1 = 2 \rightarrow$ *Solució:* $x = 1$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0,125 \rightarrow \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{1}{8} \rightarrow 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-3} \rightarrow \frac{3x-1}{2} = -3 \rightarrow$ *Solució:* $x = -\frac{5}{3}$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5} \rightarrow 3\sqrt[3]{3^{3(x-1)}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{2x+5} \rightarrow 3^{1+\frac{3(x-1)}{3}} = 3^{-2(2x+5)} \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \frac{3(x-1)}{3} = -2(2x+5) \rightarrow x = -2(2x+5) \rightarrow$ *Solució:* $x = -2$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1 \rightarrow 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^0 \rightarrow 3^{1+2x+3x} = 3^0 \rightarrow 1 + 5x = 0 \rightarrow$ *Solució:* $x = -\frac{1}{5}$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25 \rightarrow 5^{x-5} \cdot 5^{3 \cdot 2x} = 5^2 \rightarrow 5^{x-5+6x} = 5^2 \rightarrow 7x - 5 = 2 \rightarrow$ *Solució:* $x = 1$

16 Resol, utilitzant logaritmes, aquestes equacions:

a) $\frac{1}{e^x} = 27$ **b)** $e^{x-9} = \sqrt{73}$ **c)** $2^x \cdot 3^x = 81$

d) $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$ **e)** $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3$ **f)** $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4$

a) $\frac{1}{e^x} = 27 \rightarrow \frac{1}{27} = e^x \rightarrow \ln\frac{1}{27} = \ln e^x \rightarrow x = \ln\frac{1}{27} = \ln 1 - \ln 27 = 0 - \ln 27 \rightarrow x \approx -3{,}296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \rightarrow \ln e^{x-9} = \ln\sqrt{73} \rightarrow x - 9 = \frac{1}{2}\ln 73 \rightarrow x = 9 + \frac{\ln 73}{2} \rightarrow x \approx 11{,}145$

c) $6^x = 81 \rightarrow x \log 6 = \log 81 \rightarrow x = \frac{\log 81}{\log 6} \approx 2{,}453$

d) $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \rightarrow x \log\frac{2}{3} = \log 3 \rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3} \approx -2{,}710$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3 \rightarrow 2^{x+1} \cdot 2^{4(2x+1)} = 3 \rightarrow 2^{9x+5} = 3 \rightarrow \log 2^{9x+5} = \log 3 \rightarrow$

$\rightarrow (9x+5)\log 2 = \log 3 \rightarrow (9x+5) = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}5850$

Solució: $x = \frac{1,5850 - 5}{9} = -0{,}3794$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4 \rightarrow 5^{-x} \cdot 5^{3x+3} = 4 \rightarrow 5^{2x+3} = 4 \rightarrow \log 5^{2x+3} = \log 4 \rightarrow$

$\rightarrow (2x+3)\log 5 = \log 4 \rightarrow (2x+3) = \frac{\log 4}{\log 5} = 0{,}8613$

Solució: $x = \frac{0,8613 - 3}{2} = -1{,}0693$

17 **Resol les equacions següents mitjançant un canvi de variable:**

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$ **b)** $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$ **c)** $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ **e)** $9^x - 3^x - 6 = 0$ **f)** $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

g) $2^{x/2} + 2^x = 6$ **h)** $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$ **i)** $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

a) $2^x + \dfrac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \rightarrow x + \dfrac{2}{z} = 3;\ z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\ z = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1 \\ 1 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

b) $2 \cdot 2^x + \dfrac{2^x}{2} = \dfrac{5}{2};\ 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\ 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \dfrac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \dfrac{(2^x)^3}{2} = \dfrac{17}{16} \rightarrow 2^x = z \rightarrow 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128+8)(z)^3 = 17;\ (z)^3 = \dfrac{17}{136} = \dfrac{1}{8} \rightarrow z = \sqrt{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\ 3^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no val)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\ 7^x = \dfrac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\ x_2 = 1$

g) $2^{x/2} - 3 \cdot 2^x = 6 \rightarrow \sqrt{2^x} - 3 \cdot 2^x = 6$

Fem el canvi de variable $2^x = y$:

$\sqrt{y} - 3 \cdot y = 6 \rightarrow \sqrt{y} = 3 \cdot y + 6 \rightarrow (\sqrt{y})^2 = (3y+6)^2 \rightarrow y = 9y^2 + 36y + 36 \rightarrow$

$\rightarrow 9y^2 + 35y + 36 = 0 \rightarrow y = \dfrac{-35 \pm \sqrt{-71}}{18}$

No té solució.

h) $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$

Fem el canvi de variable $3^x = y$:

$\sqrt{y^2 + 7} = y + 1 \rightarrow (\sqrt{y^2+7})^2 = (y+1)^2 \rightarrow y^2 + 7 = y^2 + 2y + 1 \rightarrow 7 = 2y + 1 \rightarrow y = 3$

Solució: $x = 1$

i) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

Fem el canvi de variable $2^x = y$:

$y^3 - 3 \cdot 2 \cdot y^2 + 3 \cdot 2^2 y = 8 \rightarrow y^3 - 6y^2 + 12y = 8 \rightarrow y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \rightarrow (y-2)^3 = 0 \rightarrow y = 2$

Solució: $x = 1$

18 **Resol aquestes equacions:**

a) $\log (x^2+1) - \log (x^2-1) = \log \frac{13}{12}$

b) $\ln (x-3) + \ln (x+1) = \ln 3 + \ln (x-1)$

c) $(x-1)\log (3^{x+1}) = 3\log 3$

d) $\log (x+3) - \log (x-6) = 1$

a) $\log \frac{x^2+1}{x^2-1} = \log \frac{13}{12}$

$12x^2+12 = 13x^2-13;\ 25 = x^2$

$x_1 = -5;\ x_2 = 5$

b) $\ln (x^2-2x-3) = \ln (3x-3)$

$x^2-2x-3 = 3x-3;\ x^2-5x=0$

$x = 5\ \ (x = 0\ \text{ no val})$

c) $\log (3^{(x+1)(x-1)}) = \log 3^3$

$3^{(x+1)(x-1)} = 3^3;\ (x+1)(x-1) = 3$

$x = 2\ \ (x = -2\ \text{ no val})$

d) $\log \frac{x+3}{x-6} = 1$

$x+3 = 10x-60;\ 63 = 9x$

$x = 7$

19 **Resol les equacions següents:**

a) $\log_5 (x^2-2x+5) = 1$

b) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$

c) $2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0$

d) $\frac{1}{2}\log_{11}(x+5) = 1$

e) $\log (x^2+3x+36) = 1 + \log (x+3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

a) $\log_5 (x^2-2x+5) = \log_5 5$

$x^2-2x+5 = 5;\ x(x-2) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

b) $\frac{\log (x(3x+5))}{2} = 1;\ 3x^2+5x-100=0$

$x = \frac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} 5 \\ -40/6\ (\text{no val}) \end{cases}$

$x = 5$

c) $\log x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1;\ x_1 = 10 \\ -18/4 = -9/2;\ x_2 = 10^{-9/2} \end{cases}$

d) $\log_{11} (x+5)^{1/2} = \log_{11} 11$

$(x+5)^{1/2} = 11;\ (x+5) = 11^2$

$x = 116$

e) $\log \frac{x^2+3x+36}{x+3} = 1$

$x^2+3x+36 = 10x+30;\ x^2-7x+6=0$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = 6$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

$\ln(x \cdot 2x \cdot 4x) = 3$

$\ln(8x^3) = 3 \rightarrow 8x^3 = e^3 \rightarrow x^3 = \dfrac{e^3}{8}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{e^3}{8}} = \dfrac{e}{2} \rightarrow x = \dfrac{e}{2}$

Sistemes d'equacions

20 **Resol:**

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2y - x = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{3} = 15;\ y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = 5 \\ y = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$

$x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2 - 2x}{3} \end{array}\right\}$ $4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2 - 2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0$

$5x^2 - 2x + 6 = 0$

No té solució.

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \rightarrow (2y - 7)^2 + y^2 = 10 \rightarrow \\ 2y - x = 7 \rightarrow x = 2y - 7 \end{cases}$

$\rightarrow 4y^2 - 28y + 49 + y^2 = 10 \rightarrow 5y^2 - 28y + 49 = 10 \rightarrow y = 3,\ y = \dfrac{13}{5}$

$y_1 = 3,\ x_1 = 1;\ y_2 = \dfrac{13}{5},\ x_2 = -\dfrac{9}{5}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \rightarrow \left(\dfrac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \rightarrow -\dfrac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \rightarrow -\dfrac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \rightarrow \\ xy = 6 \rightarrow x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

$\rightarrow y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \rightarrow y = 2,\ y = -2$

$y_1 = 2,\ x_1 = 3;\ y_2 = -2,\ x_2 = -3$

e) $2x^2 - 10x + 12 = 0;\ x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrrrrl} x^2 + & y^2 - & 5x - & 5y + & 10 & = 0 \\ -x^2 + & y^2 + & 5x - & 5y - & 2 & = 0 \\ \hline & 2y^2 - & & 10y + & 8 & = 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 3,\ y_1 = 4;\ x_2 = 3,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = 4;\ x_4 = 2,\ y_4 = 1$

21 **Resol:**

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$

$8y = 24;\ y = 3;\ x = 4$

$x = 4;\ y = 3$

b) $4x + 4 = y^2 + 1 + 2y;\ x = \dfrac{y^2 + 2y - 3}{4}$

$x = \dfrac{1 + 3y}{2} = \dfrac{2 + 6y}{4}$

$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$

$y^2 - 4y - 5 = 0$

$y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow x = 8 \\ -1 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = -1;\ x_2 = 8,\ y_2 = 5$

c) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \text{ (no val)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$

$x = 6,\ y = 6\ \ (x = 27,\ y = 48$ (no val)

d) $y = 2x - 5$

$\sqrt{3x - 5} = x - 1$

$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 - 5x + 6$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow y = 1 \\ 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}$

$x_1 = 2,\ y_1 = -1;\ x_2 = 3,\ y_2 = 1$

22 **Resol els sistemes d'equacions següents:**

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x \cdot e^{y+1} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2 - 1} = 0{,}1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0{,}25 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{2x} + 3^{y-1} = 4 \\ 3^{x+1} + 3^y = 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^y = \dfrac{1}{2} \\ 2^{2(x-y)} = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2y = 12 \end{cases}$

$y = 1 + x \rightarrow 2^x + 2^{1+x} = 12 \rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \rightarrow 3 \cdot 2^x = 12 \rightarrow$

$\rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 1 + 2 = 3$

$x = 2,\ y = 3$

b) $\begin{cases} e^x \cdot e^{y+1} = 1 \ \rightarrow \ e^{x+y+1} = e^0 \ \rightarrow \ x = -1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \ \rightarrow \ (-1-y)^2 + y^2 = 1 \ \rightarrow \ 2y^2 + 2y = 0 \ \rightarrow \ y(y+1) = 0 \ \rightarrow \ y = 0;\ y = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = -1$

c) $\begin{cases} 5^x . 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5^{x+y} = 5^0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$x = 1,\ y = -1$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2-1} = 0,1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0,25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10^{x+y^2-1} = 10^{-1} \\ 2^{2x-y+1} = 2^{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y^2 - 1 = -1 \\ 2x - y + 1 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ -2y^2 - y + 3 = 0 \ \rightarrow \ y = 1,\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 1;\ x_2 = -\dfrac{9}{4},\ y_2 = -\dfrac{3}{2}$

e) $\begin{cases} 3^{2x} + 3^{y-1} = 4 \\ 3^{x+1} + 3^y = 12 \end{cases}$

Anomenem $3^x = z$ i $3^y = t$ $\begin{cases} z^2 + \dfrac{t}{3} = 4 \\ 3z + t = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3z^2 + t = 12 \\ 3z + t = 12 \end{cases} \rightarrow 3z^2 - 3z = 0 \rightarrow z = 0,\ z = 1$

$z = 0$ (no val)

$z = 1 \ \rightarrow \ t = 9 \ \rightarrow \ x = 0,\ y = 2$

f) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^y = \dfrac{1}{2} \\ 2^{2(x-y)} = 4 \end{cases}$

Anomenem $2^x = z$ y $2^y = t$ $\begin{cases} z^2 + t = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ 4t^2 + t = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ t = \dfrac{1}{4},\ t = -\dfrac{1}{2} \ \text{(no val)} \\ \dfrac{z^2}{t^2} = 4 \ \rightarrow \ z^2 = 4t^2 \end{cases}$

$t = \dfrac{1}{4} \ \rightarrow \ z = \dfrac{1}{2},\ z = -\dfrac{1}{2}$ no es vàlida.

$t = \dfrac{1}{4} \ \rightarrow \ z = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ x = -1,\ y = -2$

Página 96

23 **Resol:**

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log (x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$

a) $2 \log x = 2$

$x = 10;\ y = 100$

b) $\log_2 x + 3\log_2 y = 5$

$2\log_2 x - \log_2 y = 3$

$$\begin{array}{rl} \log_2 x + 3\log_2 y &= 5 \\ 6\log_2 x - 3\log_2 y &= 9 \\ \hline 7\log_2 x \quad\quad &= 14 \end{array}$$

$x = 4,\ \ y = 2$

c) $2\log x + \log y = 2$

$\log x - 2\log y = 6$

$$\begin{array}{rl} 4\log x + 2\log y &= \ \ 4 \\ \log x - 2\log y &= \ \ 6 \\ \hline 5\log x \quad\quad &= 10 \end{array} \rightarrow \log x = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 100 \\ y = \dfrac{1}{100} \end{array}\right\}$$

d) $\log \dfrac{x}{y} = 1;\ \dfrac{x}{y} = 10;\ x = 10y$

$100y^2 - y^2 = 11;\ 99y^2 = 11;\ y^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow y = \pm\dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{10}{3};\ y = \dfrac{1}{3}$

$\left(y = -\dfrac{1}{3} \text{ no val}\right)$

e) $$\left.\begin{array}{r} x = 25 + y \\ \log \dfrac{y}{x} = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0,1x \\ 0,9x = 25 \end{array}$$

$x = \dfrac{250}{9};\ y = \dfrac{25}{9}$

f) $$\left.\begin{array}{l} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumant les dues equacions, queda:} \\ 2\ln x = 6 \rightarrow \ln x = 3 \rightarrow x = e^3 \end{array}$$

Restant la 1a equació de la 2a, queda:

$2\ln y = 2 \rightarrow \ln y = 1 \rightarrow y = e$

$x = e^3;\ y = e$

Mètode de Gauss

24 Resol pel mètode de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{rl} x - y - z &= -10 \\ x + 2y + z &= 11 \\ 2x - y + z &= 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a) + (1a)} \\ \text{(3a) + (1a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{rl} x - y - z &= -10 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x - 2y &= -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a) + 2}\cdot\text{(2a)} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl} x - y - z &= -10 \\ 2x + y &= 1 \\ 7x &= 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0\\ 3x+6y-2z=0\\ 4x+y-z=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)+2\cdot(1a)\\(3a)+(1a)\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x-3y+z=0\\7x=0\\6x-2y=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=0\end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3\\ 2x-y+z=2\\ x-y+z=1\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)+(1a)\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y+z=3\\3x+2z=5\\2x+2z=4\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)\end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3\\ 3x+2z=5\\ -x=-1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}x=1\\ z=\dfrac{5-3x}{2}=1\\ y=3-x-z=1\end{array}\right\} \begin{array}{l}x=1\\y=1\\z=1\end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18\\ x-z=6\\ x-2y+z=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+2\cdot(1a)\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\3x+3z=36\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a):3\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\x+z=12\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+(2a)\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\2x=18\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}x=9\\z=x-6=3\\y=18-x-z=6\end{array}\right\} \begin{array}{l}x=9\\y=6\\z=3\end{array}$$

e) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2\\ 2x+3y+5z=11\\ x-5y+6z=29\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-(1a)\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y+z=2\\y+3z=7\\-6y+5z=27\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+6\cdot(2a)\end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2\\ y+3z=7\\ 23z=69\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}z=\dfrac{69}{23}=3\\ y=7-3z=7-9=-2\\ x=2-y-z=2+2-3=1\end{array}\right\} \begin{array}{l}x=1\\y=-2\\z=3\end{array}$$

f) $$\left.\begin{array}{l} x+y-2z=9\\ 2x-y+4z=4\\ 2x-y+6z=-1\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)+(1a)\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y-2z=9\\3x+2z=13\\3x+4z=8\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)\end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y-2z=9\\ 3x+2z=13\\ 2z=-5\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}z=\dfrac{-5}{2}\\ x=\dfrac{13-2z}{3}=6\\ y=9-x+2z=9-6-5=-2\end{array}\right\} \begin{array}{l}x=6\\y=-2\\z=\dfrac{-5}{2}\end{array}$$

25 **Resol:**

a) $\begin{cases}3x+2y+z-3=0\\ x+y=z-5\\ x=z-2y-3\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}7x-3y+z=-11\\ x-y+1=z\\ 2x+2y=8+z\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=z-6\\ 2x-y-\dfrac{z}{5}=0\\ \dfrac{-3x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}-10\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}\dfrac{2(x-1)}{5}+y=\dfrac{z}{6}-4\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=8\\ x+2y+\dfrac{z}{4}=1\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z-3=0\\ x+y=z-5\\ x=z-2y-3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}3x+2y+z=3\\x+y-z=-5\\x+2y-z=-3\end{array}\right\} \begin{array}{l}(2a)\\(1a)\\(3a)\end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=-5\\ 3x+2y+z=3\\ x+2y-z=-3\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1a)\\(2a)-3\cdot(1a)\\(3a)-(1a)\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y-z=-5\\-y+4z=18\\y=2\end{array}\right\} \begin{array}{l}x=-2\\y=2\\z=5\end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 7x - 3y + z = -11 \\ x - y + 1 = z \\ 2x + 2y = 8 + z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x - 3y + z = -11 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + 2y - z = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2a) \\ (1a) \\ (3a) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ 7x - 3y + z = -11 \\ 2x + 2y - z = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 7 \cdot (1a) \\ (3a) - 2 \cdot (1a) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ 4y + 8z = -4 \\ 4y + z = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ 4y + 8z = 4 \\ -7z = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = z - 6 \\ 2x - y - \dfrac{z}{5} = 0 \\ \dfrac{-3x}{4} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2} - 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - z = -6 \\ 2x - y - \dfrac{z}{5} = 0 \\ \dfrac{-3x}{4} - \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{2} = -10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + 2y - 6z = -36 \\ 10x - 5y - z = 0 \\ -9x - 4y - 6z = -120 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (1a) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - 6z = -36 \\ 10x - 5y - z = 0 \\ -12x - 6y = -84 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) - 6 \cdot (2a) \\ (2a) \\ 1/6 \cdot (3a) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} -57x + 32y = -36 \\ 10x - 5y - z = 0 \\ -2x - y = -14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) + 32 \cdot (3a) \\ (2a) \\ (3a) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -121x = -484 \\ 10x - 5y - z = 0 \\ -2x - y = -14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2(x-1)}{5} + y = \dfrac{z}{6} - 4 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 8 \\ x + 2y + \dfrac{z}{4} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2(x-1)}{5} + y - \dfrac{z}{6} = -4 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 8 \\ x + 2y + \dfrac{z}{4} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x + 30y - 5z - 12 = -120 \\ 6x - 3y + 4z = 96 \\ 4x + 8y + z = 4 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x + 30y - 5z = -108 \\ 6x - 3y + 4z = 96 \\ 4x + 8y + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) + 5 \cdot (3a) \\ (2a) - 4 \cdot (3a) \\ (3a) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 32x + 70y = -88 \\ -10x - 35y = 80 \\ 4x + 8y + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) + 2 \cdot (2a) \\ (2a) \\ (3a) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 12x = 72 \\ -10x - 35y = 80 \\ 4x + 8y + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -4 \\ z = 12 \end{array}$$

26 Resol aplicant-hi el mètode de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y \qquad = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 5 \cdot (3a) \\ (3a) \end{array} \triangleright \left.\begin{array}{r} x - y \qquad = 1 \\ -3x + y \qquad = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 3 \cdot (1a) \\ (3a) \end{array} \triangleright$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y \qquad = 1 \\ -2y \qquad = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \triangleright \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x \qquad + 6z = 8 \\ 6x \qquad + 18z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) : 2 \\ (3a) : 6 \end{array} \triangleright$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ x \qquad + 3z = 4 \\ x \qquad + 3z = 4/6 \end{array}\right\} \text{Las equacions 2a i 3a diuen coses contradictòries.}$$

El sistema és incompatible; no té solució.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 3 \cdot (1a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \triangleright \left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ -x \qquad - 5z = -5 \\ -x \qquad - 5z = -5 \end{array}\right\}$$

Hi ha dues equacions iguals. El sistema és compatible indeterminat. Busquem les solucions en funció de z:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow (5 - 5z) + y = 2 - 3z \rightarrow y = 2z - 3 \\ \rightarrow x = 5 - 5z \end{array}$$

$x = 5 - 5z$, $y = 2z - 3$, $z = z$

d) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) + 5\ (1a) \end{array} \triangleright \left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 2 \\ -x \qquad = -2 \\ 5x - 2y \qquad = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{5x - 9}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$x = 2$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{3}{2}$

e) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \triangleright \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{array}\right\}$$

Les equacions 2a i 3a obtingudes diuen coses contradictòries. Per tant, el sistema és incompatible.

f) $\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ x + 3y \quad = 1 \\ x + 3y \quad = 1 \end{array}\right\}$

Hi ha dues equacions iguals. El sistema és compatible indeterminat. Busquem les solucions en funció del paràmetre y:

$\left.\begin{array}{l} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{array}\right\} \rightarrow -2(1-3y) + z = 1 - y \rightarrow z = 3 - 7y$

$x = 1 - 3y,\ z = 3 - 7y$

Inequacions. Sistemes d'inequacions

27 **Resol aquestes inequacions:**

a) $5(2 + x) > -5x$ **b)** $\frac{x-1}{2} > x - 1$ **c)** $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$ **e)** $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ **f)** $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x;\ 10x > -10;\ x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2;\ 1 > x$

$(-\infty, 1)$

c) $x(x + 5) < 0$

$(-5, 0)$

d) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $\frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

$(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $\frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$[-3, 5]$

28 **Resol els sistemes d'inequacions següents:**

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x < 1 \\ x > -4 \end{array}\right\} (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x > -\frac{5}{3} \\ x > 4 \end{array}\right\} (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} x > 17 \\ x > \frac{19}{5} \end{array}\right\} (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{array}\right\}$ No té solució.

29 **Resol:**

a) $(x + 1)\, x^2\, (x - 3) > 0$ **b)** $x(x^2 + 3) < 0$ **c)** $\frac{x^2}{x+4} < 0$ **d)** $\frac{x-3}{x+2} < 0$

a) $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ x-3>0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x>-1 \\ x>3 \end{array}\right\} (3, +\infty) \\ \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ x-3<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x<3 \end{array}\right\} (-\infty, -1) \end{array}\right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

b) $(-\infty, 0)$

c)

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, +\infty)$
x^2	+	+	+
$x + 4$	–	+	+
$\frac{x^2}{x+4}$	–	+	+

$(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$

d)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	–	–	+
$x + 2$	–	+	+
$\frac{x-3}{x+2}$	+	–	+

$(-2, 3)$

30 **Resol els sistemes d'inequacions següents:**

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \geq 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 & \rightarrow \textit{Solucions: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 & \rightarrow \textit{Solucions: } (-2, \infty) \end{cases}$

Les solucions comunes són: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 & \rightarrow \textit{Solucions: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 & \rightarrow \textit{Solucions: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Les solucions comunes són: $[1, 4] \cap (-\infty\ 3) = [1, 3)$

c) $\begin{cases} x^2 \leq 4 & \rightarrow \textit{Solucions: } [-2, 2] \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 & \rightarrow \textit{Solucions: } [1, 4] \end{cases}$

Les solucions comunes són: $[-2, 2] \cap [1, 4] = [1, 2]$

d) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 & \rightarrow \textit{Solucions: } (-\infty, -1] \cup [6, \infty) \\ -x^2 + 11x - 24 \geq 0 & \rightarrow \textit{Solucions: } [3, 8] \end{cases}$

Les solucions comunes són: $((-\infty, -1] \cup [6, \infty)) \cap [3, 8] = [6, 8]$

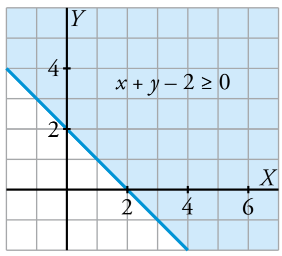
31 **Resol gràficament:**

a) $x + y - 2 \geq 0$ **b)** $2x - 3y \leq 6$ **c)** $\frac{x - 3y}{2} \leq 3$ **d)** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \geq -1$

a) Dibuixem la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat $0 + 0 - 2 \geq 0$.

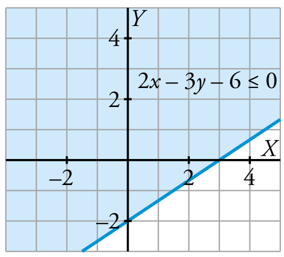
La solució és el semiplà que no conté O.



b) Dibuixem la recta $r: 2x - 3y - 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat $0 - 0 - 6 \leq 0$.

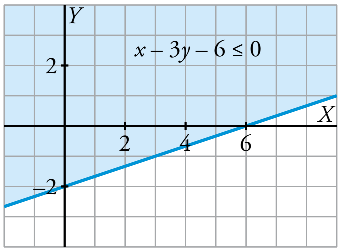
La solució és el semiplà que conté O.



c) $\dfrac{x-3y}{2} \le 3 \to x-3y-6 \le 0$. Dibuixem la recta $r: x - 3y - 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat $0 - 0 - 6 \le 0$.

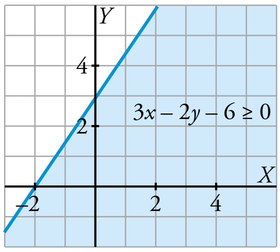
La solució és el semiplà que conté O.



d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \ge -1 \to 3x - 2y + 6 \ge 0$. Dibuixem la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat $0 - 0 + 6 \ge 0$.

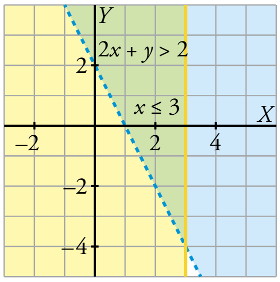
La solució és el semiplà que conté O.



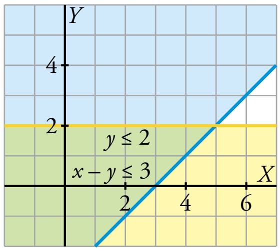
32 **Resol gràficament:**

a) $\begin{cases} 2x + y > 2 \\ x \le 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \le 3 \\ y \le 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y \le 3 \\ 2x + y \le 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y \le 5 \\ x + y \ge 8 \end{cases}$

a) Resolem cada una de les inequacions. La solució es la regió obtinguda de la intersecció dels dos semiplans. La recta $2x + y = 2$ no pertany a la regió solució.

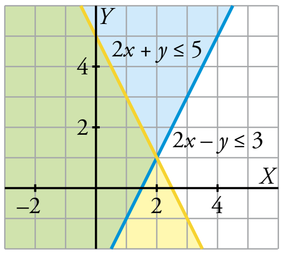


b) Resolem cada una de les inequacions. La solució es la regió obtinguda de la intersecció dels dos semiplans.

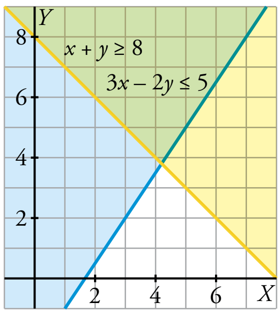


c) Resolem cada una de les inequacions. La solució es la regió obtinguda de la intersecció dels dos semiplans.

.



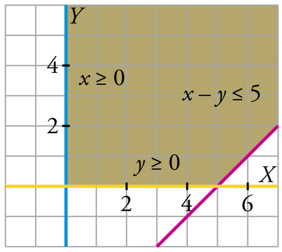
d) Resolem cada una de les inequacions. La solució es la regió obtinguda de la intersecció dels dos semiplans.



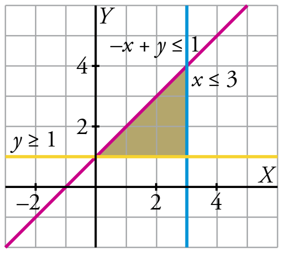
33 **Representa, en cada cas, els punts del pla que verifiquen les condicions donades:**

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y < 2 \\ 2x - y > 1 \\ y > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x - y \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

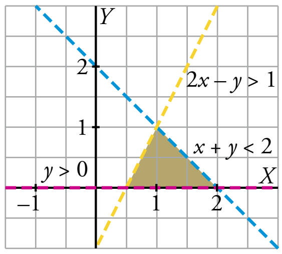
a) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució es la intersecció dels tres semiplans.



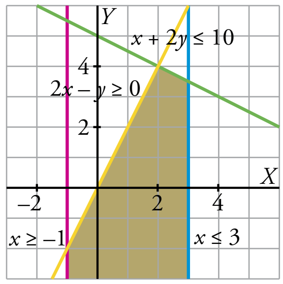
b) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és el triangle intersecció dels tres semiplans.



c) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és el triangle intersecció dels tres semiplans (els segments dels costats del triangle no pertanyen a la solució).



d) Resolem cada una de les inequacions. La regió solució és la intersecció dels quatre semiplans.



Página 97

Problemes

34 **Un inversor, que té 28 000 €, col·loca part del capital en un banc al 8 % i la resta en un altre banc al 6 %. Si la primera part li produeix anualment 200 € més que la segona, quant va col·locar en cada banc?**

x al 8 % $\xrightarrow{\text{1 any}}$ $0{,}08x$

$(28\,000 - x)$ al 6 % $\xrightarrow{\text{1 any}}$ $0{,}06\,(28\,000 - x)$

$0{,}08x = 0{,}06(28\,000 - x) + 200; \; 0{,}08x = 1\,680 - 0{,}06x + 200 \;\to\; x = 13\,428{,}57$ €

Va col·locar 13 428,57 € al 8 % i 14 571,43 € al 6 %.

35 **Contractem una hipoteca el mes de gener del 2013 amb revisió semestral del tipus d'interès. Pel juliol ens apugen la quota un 4 % i, en la revisió següent, ens l'abaixen un 1 % respecte a la del juliol. Si el gener del 2014 estem pagant 19,24 € mensuals més que en el mateix mes de l'any anterior, quina era la quota inicial?**

Utilitzem la fórmula $C_f = C_i \cdot \textit{índex de variació}$ amb C_f = Quota final, C_i = Quota inicial

L'índex de variació en el primer semestre és $1 + \frac{r}{2}$ (on r és el tant per u de l'interès).

$i.v. = 1 + 0{,}04 = 1{,}004$

L'índex de variació en el segon semestre és $1 - \frac{r}{2}$ (on r és el tant per u de l'interès).

$i.v. = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

L'índex de variació total és $\textit{índex de variació} = 1{,}04 \cdot 0{,}99 = 1{,}0296$

$C_f = C_i \cdot \textit{índex de variació} \rightarrow x + 19{,}24 = x \cdot 1{,}0296 \rightarrow x = 650$ € era la quota inicial.

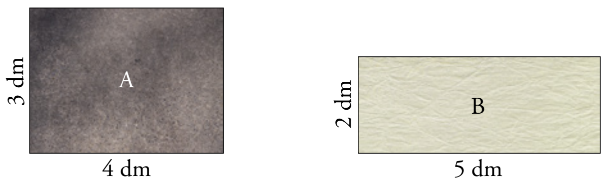
36 **El nombre de visitants a una certa exposició durant el mes de febrer es va incrementar en un 12 % respecte al mes de gener. No obstant això, el març va patir un descens del 12 % respecte al febrer. Si el nombre de visitants del mes de gener va superar en 36 persones el de març, quantes persones van veure l'exposició el gener?**

$$\text{Gener} \xrightarrow{+12\,\%} \text{Febrer} \xrightarrow{-12\,\%} \text{Març}$$

$$x \qquad\qquad 1{,}12\,x \qquad\qquad 0{,}88 \cdot 1{,}12x = 0{,}9856x$$

$x = 0{,}9856x + 36 \Rightarrow x = 2\,500$ persones.

37 **Per cobrir el terra d'una habitació, un enrajolador disposa de dos tipus de rajoles:**



Triant el tipus A, es necessitarien 40 rajoles menys que si es triés el tipus B. Quina és la superfície de l'habitació?

$$\left.\begin{array}{l} \text{nre. rajoles A} \rightarrow x \\ \text{nre. rajoles B} \rightarrow x + 40 \end{array}\right\} \text{Superfície:} \quad 12x = 10(x + 40)$$

$$12x = 10x + 400$$

$$2x = 400$$

$$x = 200 \text{ rajoles}$$

$200 \cdot 12 = 2\,400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}^2$

38 **En un nombre de dues xifres, les desenes són el triple de les unitats. Si s'inverteix l'ordre de les xifres, s'obté un altre nombre 54 unitats menor. Calcula el nombre inicial.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x}{D} \cdot \dfrac{x}{U} \rightarrow 30x + x = 31x \\ \dfrac{x}{D} \cdot \dfrac{3x}{U} \rightarrow 10x + 3x = 13x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 31x = 13x + 54 \\ 18x = 54 \\ x = 3 \end{array}$$

El nombre és el 93.

39 **Dues aixetes omplen un dipòsit de 1 500 litres en una hora i dotze minuts. Brollant per separat, la primera tardaria una hora més que la segona. Quant tardaria a omplir el dipòsit cada aixeta per separat?**

Entre totes dues $\rightarrow$ 1 500 litres en 1,2 hores.

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\text{o}} \rightarrow t+1 \\ 2.^{\text{o}} \rightarrow t \end{array}\right\} \frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}=\frac{1}{1,2} \text{ (en 1 hora)}$$

$$\frac{1,2(t+t+1)}{1,2t(t+1)}=\frac{t(t+1)}{1,2t(t+1)}$$

$2,4t + 1,2 = t^2 + t$

$t^2 - 1,4t - 1,2 = 0$

$$t=\frac{1,4 \pm 2,6}{2}=\begin{cases} 2 \\ -0,6 \text{ Impossible!} \end{cases}$$

La primera tardaria 3 hores i la segona 2 hores.

40 **Una piscina tarda 5 hores a omplir-se usant la seva presa d'aigua habitual, i 20 hores si usem una mànega. Quin temps serà necessari emprar per al seu ompliment si usem ambdós mètodes de manera simultània?**

En una hora, la presa d'aigua habitual ompliria $\frac{1}{5}$ de la piscina. En una hora la mànega ompliria $\frac{1}{20}$ de la piscina.

Usant els dos mètodes, en una hora s'ompliria $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$ de la piscina.

Així, doncs, es necessiten 4 hores per omplir la piscina.

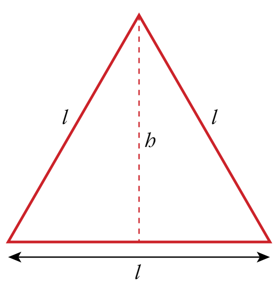
41 **En una botiga es ven te blanc a 18 €/kg i te verd a 14 €/kg. També, una mescla de tots dos a 16,40 €/kg. Quina és la composició de la mescla?**

	PREU	QUANTITAT DE TÉ PUR EN 1 KG DE MESCLA	TOTAL
TÉ BLANC	18 €/kg	x	$18x$
TÉ VERD	14 €/kg	y	$14y$
MESCLA	16,40 €/kg	$1 = x + y$	$18x + 14y = 16,40$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 18x+14y=16,40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0,6 \\ y=0,4 \end{array}$$

La mescla té 60 % de te blanc i 40 % de te verd.

42 **La superfície d'un triangle equilàter és de 50 m^2. Calcula'n el costat.**



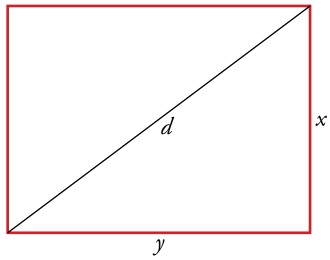
$$h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=l^2$$

$$h^2=l^2-\frac{l^2}{4}=\frac{3l^2}{4};\ h=\frac{\sqrt{3}\,l}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}=50$$

$$l^2=\frac{200}{\sqrt{3}} \rightarrow l=\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{\sqrt{3}}}=10,75 \text{ m}$$

43 **Calcula les dimensions d'una finca rectangular sabent que el perímetre mesura 140 m i la diagonal és de 50 m.**

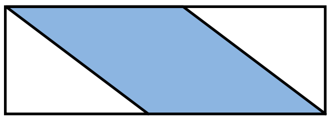


$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 140 = 2x + 2y \\ 50 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 70 = x + y \\ 2\,500 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

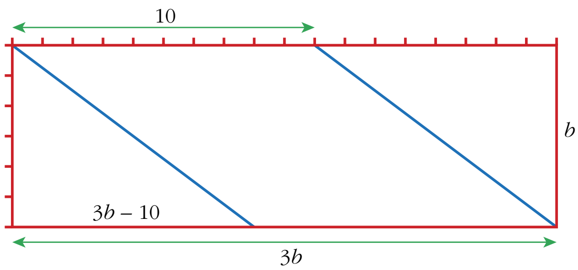
Solucions: $x_1 = 30,\ y_1 = 40;\ x_2 = 40,\ y_2 = 30$

Un costat mesura 30 m i l'altre 40 m.

44 **El quadrilàter central és un rombe de 40 m de perímetre. Calcula les dimensions del rectangle sabent que la base és el triple de l'altura.**



$4x = 40;\ x = 10$ m



$$b^2 + (3b - 10)^2 = 10^2 \rightarrow b^2 + 9b^2 + 100 - 60b = 100 \rightarrow 10b^2 - 60b = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow b(10b - 60) = 0 \rightarrow b = 0,\ b = 6$$

Base: 18 m; Altura: 6 m

45 **Un granger espera obtenir 36 € per la venda d'ous. De camí cap al mercat se li'n trenquen quatre dotzenes. Per obtenir el mateix benefici, augmenta en 0,45 € el preu de la dotzena. Quantes dotzenes tenia al principi?**

Tenia x dotzenes $\rightarrow \dfrac{36}{x}$ €/dotzena

Li queden $x - 4$ dotzenes $\rightarrow \left(\dfrac{36}{x} + 0{,}45\right)$ €/dotzena

$$\left(\frac{36}{x} + 0{,}45\right)(x - 4) = 36$$

$(36 + 0{,}45x)(x - 4) = 36x$

$36x - 144 + 0{,}45x^2 - 1{,}8x = 36x$

$0{,}45x^2 - 1{,}8x - 144 = 0$

$x = 20\ \ (x = -16$ no val$) \Rightarrow$ Tenia 20 dotzenes.

46 **Un botiguer inverteix 125 € en la compra d'una partida de pomes. En rebutja 20 kg per defectuoses i ven la resta per 147 €, augmentant 0,40 € cada quilo sobre el preu de compra. Quants quilograms en va comprar?**

En va comprar x kg $\rightarrow \dfrac{125}{x}$ €/kg

En ven $(x - 20)$ kg $\rightarrow \left(\dfrac{125}{x} + 0{,}40\right)$ €/kg

$\left(\dfrac{125}{x} + 0{,}40\right)(x - 20) = 147$

$(125 + 0{,}40x)(x - 20) = 147x$

$125x - 2\,500 + 0{,}40x^2 - 8x = 147x$

$0{,}40x^2 - 30x - 2\,500 = 0$

$x = 125$ $(x = -50$ no val)

En va comprar 125 kg.

47 **Un magatzem té contenidors de reciclatge per abastir durant 6 mesos les dues entitats per a les quals treballa. Sabent que, si en subministrés a una sola de les dues, la primera la podria servir durant 5 mesos més que la segona, durant quant de temps podria proveir cada una si fossin clients únics?**

Anomenem t el nombre de mesos que pot servir l'entitat A. El nombre de mesos que pot servir l'entitat B és $t + 5$.

La proporció de contenidors que serveix al llarg d'un mes a l'entitat A és $\dfrac{1}{t}$.

La proporción de continedors que serveix al llarg d'un mes a l'entitat B és $\dfrac{1}{t+5}$.

La proporció de contenidors servits al llarg d'un mes a les dues entitats és: $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+5} = \dfrac{2t+5}{t(t+5)}$

Aquesta quantitat és la sisena part del total, ja que el magatzem pot servir les dues entitats durant 6 mesos.

$6\left(\dfrac{2t+5}{t(t+5)}\right) = 1 \rightarrow$ *Solucions:* $t = 10$, $t = -3$ que no és vàlida.

Pot servir només la primera entitat durant 10 mesos.

Pot servir només la segona entitat durant 15 mesos.

48 **Una empresa fabrica dos tipus de llaunes de refrescos de 33 cl. El primer tipus té una altura de 12 cm, i el segon, de 15 cm. Quin té un major cost de producció?**

Les fórmules del volum i la superfície total d'una llauna són:

$V = \pi r^2 h$; $S = \pi r^2 + 2\pi r h$

A partir del volum i l'altura, calculem el radi de la base.

Llauna A:

$h = 12$ cm $\rightarrow 33 = \pi r^2 \cdot 12 \rightarrow r^2 = \dfrac{33}{12\pi} \rightarrow r = \sqrt{\dfrac{33}{12\pi}}$

$S_A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi\dfrac{33}{12\pi} + 2\pi\sqrt{\dfrac{33}{12\pi}} \cdot 12 = 73{,}293$

Llauna B:

$h = 15$ cm $\rightarrow 33 = \pi r^2 \cdot 15 \rightarrow r^2 = \dfrac{33}{15\pi} \rightarrow r = \sqrt{\dfrac{33}{15\pi}}$

$S_B = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi\dfrac{33}{15\pi} + 2\pi\sqrt{\dfrac{33}{15\pi}} \cdot 15 = 81{,}069$

Té un major cost de producció la llauna d'altura 15 cm.

49 **De dos triangles rectangles se sap que: la suma de les hipotenuses és 18, els catets menors són 3 i 5, respectivament, i els catets majors estan en relació 1/3. Determina aquests triangles.**

Anomenem h_1 i h_2 les hipotenuses dels triangles i C_1 i C_2 els catets desconeguts del primer i del segon triangle respectivament.

Expressem les hipotenuses en funció dels catets $h_1 = \sqrt{3^2 + C_1^2}$; $h_2 = \sqrt{5^2 + C_2^2}$

Per altra part: $C_2 = 3C_1$

$h_1 + h_2 = 18 \rightarrow \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18$

Tenim el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = 3C_1 \\ \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18 \end{array}\right\} \textit{Solucions: } C_1 = -4,\ C_2 = -12;\ C_1 = 4,\ C_2 = 12$$

Com que els costats han de ser positius, la solució és $C_1 = 4$, $C_2 = 12$.

El triangle T_1 té catets de mesures 3 i 4 i hipotenusa de mesura 5.

El triangle T_2 té catets de mesures 5 i 12 i hipotenusa de mesura 13.

50 **En una caixa enregistradora trobem bitllets de 50 €, 100 € i 200 €; el nombre total de bitllets és igual a 21 i la quantitat total de diners 1 800 €. Sabent que el nombre de bitllets de 50 € és el quíntuple dels de 200 €, calcula el nombre de bitllets de cada classe.**

Anomenem:

x = nre. de bitllets de 50 €

y = nre. de bitllets de 100 €

z = nre. de bitllets de 200 €

Expressem les condicions en funció de les incògnites i obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 21 \\ 50x + 100y + 200z = 1\,800 \\ x = 5z \end{array}\right\} \textit{Solució: } x = 10,\ y = 9,\ z = 2$$

Hi ha 10 bitllets de 50 €, 9 bitllets de 100 € i 2 bitllets de 200 €.

51 **En una funció de teatre es recapten 5 200 € amb la venda de 200 entrades de tres tipus diferents: pati de butaques, a 30 €; primer i segon pis, a 25 €, i localitats amb visibilitat reduïda, a 10 €. Sabent que el nombre de localitats més econòmiques suposen un 25 % del nombre de localitats de 25 €, calcula el nombre d'entrades de cada tipus.**

Anomenem:

x = nre. d'entrades de 30 €

y = nre. d'entrades de 25 €

z = nre. d'entrades de 10 €

Expressem les condicions en funció de les incògnites i obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 200 \\ 30x + 25y + 10z = 5\,200 \\ z = 0,25y \end{array}\right\} \textit{Solució: } x = 100,\ y = 80,\ z = 20$$

Hi ha 100 entrades de 30 €, 80 entrades de 25 € i 20 entrades de 10 €.

52 **Preparem un assortiment de bombons de dos tipus: de 10 €/kg i de 15 €/kg, respectivament. El nostre pressupost és de 600 € i en volem preparar, almenys, 40 kg. Quines restriccions té la composició de l'assortiment?**

Anomenem:

x = quantitat de bombons de 10 €/kg

y = quantitat de bombons de 15 €/kg

Expressem les condicions en funció de les incògnites i obtenim el sistema d'equacions següent:

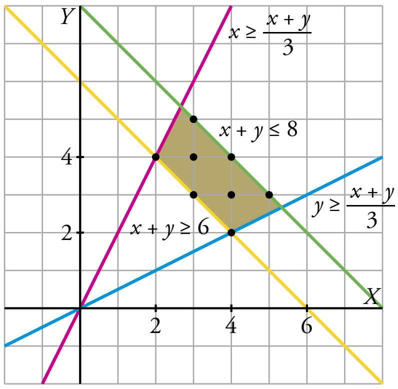
$$\begin{cases} x+y\le 40 \\ 10x+15y\le 600 \end{cases}$$

53 **Un comitè d'una comunitat de veïns ha d'estar format per entre 6 i 8 persones. El nombre d'homes i el de dones no pot ser inferior a un terç del grup. Quantes combinacions possibles hi ha?**

Anomenem x el nre. de dones i y el nre. d'homes. Les condicions són:

$$\begin{cases} 6\le x+y\le 8 \\ x\ge \dfrac{x+y}{3} \\ y\ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representem la regió solució:



Les diferents possibilitats són: $(x=4,\ y=2)$, $(x=3,\ y=3)$, $(x=2,\ y=4)$, $(x=4,\ y=3)$, $(x=3,\ y=4)$, $(x=5,\ y=3)$, $(x=4,\ y=4)$, $(x=3,\ y=5)$, que corresponen als punts de la regió comuna les coordenades de la qual són enteres.

Pàgina 98

Per resoldre

54 **Resol:**

a) $x^7-16x^4+64x=0$ **b)** $\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}=2$ **c)** $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=x+1$

d) $(\sqrt{x}+x+2)\,x=0$ **e)** $\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}=\dfrac{-5}{6}$

a) $x^7-16x^4+64x=0$

Factoritzem el polinomi:

$x^7-16x^4+64x=x(x-2)^2(2x+x^2+4)^2$

Solucions: $x=0$; $x=2$

b) $\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}=2 \rightarrow \dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}-2=0$

Operem en el membre de l'esquerra:

$\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}-2=-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

L'equació queda:

$-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1,$ que és vàlida.

Solució: $x = 1$

c) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=x+1$

$(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x})^2=(x+1)^2$

$3x+2\sqrt{x(2x+1)}+1=x^2+2x+1$

$2\sqrt{x(2x+1)}=x^2-x$

$4x(2x+1)=x^4-2x^3+x^2 \rightarrow x^4-2x^3+x^2-8x^2-4x=0$

Factoritzem el polinomi:

$x^4-2x^3+x^2-8x^2-4x=x(x-4)(x+1)^2$

Solucions: $x = 0,\ x = 4,\ x = -1$ no vàlida

d) $(\sqrt{x}+x+2)x=0$ Cada factor s'iguala a zero: $x=0,\ \sqrt{x}+x+2=0$

Resolem $\sqrt{x}+x+2=0$

$\sqrt{x}=-x-2$

$x=x^2+4x+4$

$x^2+3x+4=0$ que no té solucions.

Tenim, aleshores, solament la solució corresponent al primer factor.

Solució: $x = 0$

e) $\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}=\dfrac{-5}{6}$

$\dfrac{(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{(x+1)(x-4)}}=\dfrac{-5}{6}$

$(6((x-4)-(x+1)))^2=-5(\sqrt{(x+1)(x-4)})^2$

$900=25(x+1)(x-4)$

$900=25x^2-75x-100 \rightarrow x=8,\ x=-5$ no es vàlida.

Solució: $x = 8$

55 Resol aquestes equacions de grau superior a dos en les quals puguis aïllar la incògnita:

a) $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{25}{9x^2}=0$ **b)** $\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=0$ **c)** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2}=0$

d) $\dfrac{2}{5x}-\dfrac{5x^3}{2}=0$ **e)** $\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+x^2}=0$

a) $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{25}{9x^2}=0$

$\dfrac{27x^3+125}{45x^2}=0 \rightarrow 27x^3+125=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{-125}{27}}=-\dfrac{5}{3}$

Solució: $x=-\dfrac{5}{3}$

b) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=0$

$\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=\dfrac{81x^4-16}{648x^3}=0 \rightarrow 81x^4-16=0 \rightarrow x=\sqrt[4]{\dfrac{26}{81}}=\pm\dfrac{2}{3}$

Solucions: $x=\dfrac{2}{3},\ x=-\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2}=0$

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3-2}{2x^2}=0 \rightarrow x^3-2=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{2}$

Solució: $x=\sqrt[3]{2}$

d) $\dfrac{2}{5x}-\dfrac{5x^3}{2}=0$

$\dfrac{2}{5x}-\dfrac{5x^3}{2}=-\dfrac{25x^4-4}{10x}=0 \rightarrow 25x^4-4=0 \rightarrow x=\sqrt[4]{\dfrac{4}{25}}=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Solucions: $x=\sqrt{\dfrac{2}{5}},\ x=-\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

e) $\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+x^2}=0$

$\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+x^2}=-\dfrac{x-2}{x}=0 \rightarrow (x-2)=0 \rightarrow x=2$

Solució: $x=2$

56 **Resol les equacions següents on apareixen valors absoluts:**

a) $|x-5|=3x-1$

b) $\left|\dfrac{x-3}{2}\right|=4$

c) $|x^2-x|=|1-x^2|$

d) $|x^2-3x+1|=1$

a) $|x-5|=3x-1 \rightarrow \begin{cases} x-5=3x-1 \\ x-5=-(3x-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3/2 \end{cases}$

Solucions: $x=\dfrac{3}{2}$

b) $\left|\dfrac{x-3}{2}\right|=4 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=4 \\ \dfrac{x-3}{2}=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-5 \end{cases}$

Solucions: $x=11,\ x=-5$

c) $|x^2-x|=|1-x^2| \rightarrow \begin{cases} x^2-x=1-x^2 \\ x^2-x=-(1-x^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1,\ x=-1/2 \\ x=1 \end{cases}$

Solucions: $x=1,\ x=-\dfrac{1}{2}$

d) $|x^2-3x+1|=1 \rightarrow \begin{cases} x^2-3x+1=1 \\ x^2-3x+1=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3,\ x=0 \\ x=2,\ x=1 \end{cases}$

Solucions: $x=3,\ x=0,\ x=2,\ x=1$

57 Resol les equacions exponencials següents:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0{,}25$

b) $\frac{\sqrt{3^x}}{(1/3)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$

d) $3^x \cdot 9^x = 2$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$

f) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0{,}25$

$(2^{-2})^x \cdot 2^{4(x+1)} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2}$

$2^{-2x} \cdot 2^{4x+4} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2} \rightarrow 2^{-2x+4x+4+1-x} = 2^{-2}$

$-2x + 4x + 4 + 1 - x = -2 \rightarrow x = -7$

Solució: $x = -7$

b) $\frac{\sqrt{3^x}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

$\frac{3^{(1/2)\cdot x}}{3^{-(x+1)}} \cdot 3^{2(1-x)} = 3^5$

$3^{\frac{1}{2}\cdot x} \cdot 3^{x+1} \cdot 3^{2-2x} = 3^5 \rightarrow 3^{\frac{x}{2}+x+1+2-2x} = 3^5$

$\frac{x}{2} + x + 1 + 2 - 2x = 5 \rightarrow x = -4$

Solució: $x = -4$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$

$2^x \cdot 5 \cdot 5^x = 10 \rightarrow 5 \cdot (2 \cdot 5)^x = 10 \rightarrow 5 \cdot 10^x = 10 \rightarrow 10^x = 2 \rightarrow x = \log 2$

Solució: $x = \log 2 = 0{,}69$

d) $3^x \cdot 9^x = 2$

$3^x \cdot 3^{2x} = 2$

$3^{3x} = 2$

$3x = \log_3 2 \rightarrow x = \frac{\log_3 2}{3}$

Solució: $x = \frac{\log_3 2}{3} = 0{,}21$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$

$5^{2x} - 2 \cdot 5 \cdot 5^x + 5^2 = 0 \rightarrow (5^x - 5)^2 = 0 \rightarrow 5^x - 5 = 0 \rightarrow 5^x = 5 \rightarrow x = 1$

Solució: $x = 1$

f) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

Fem el canvi de variable: $3^x = y$

$y^2 + 2 \cdot 3y - 27 = 0 \rightarrow y = 3, y = -9$ no vàlida

$y = 3 \rightarrow x = 1$

Solució: $x = 1$

58 Resol aquestes equacions logarítmiques:

a) $2\ log_2\ x = log_2 \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$

b) $log\ (x + 1)^5 + log\ (3x + 2)^5 = 5$

c) $log\ (8 + x^3) = 3\ log\ (x + 2)$

d) $ln\ 6 + (x^2 - 5x + 7)\ ln\ 2 = ln\ 12$

e) $(2x^2 + x - 3)\ log\ 5 = 2\ log \frac{1}{5}$

f) $log\ (3^{1-x})^{1+x} + log\ 2700 = 2$

a) $2\ log_2\ x = log_2 \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \rightarrow 2\ log_2\ x = log_2\ x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow 2\ log_2\ x = log_2\ x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow log_2\ x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Solució: $x = \frac{1}{2}$

b) $log\ (x + 1)^5 + log\ (3x + 2)^5 = 5$

$log\ (x + 1)^5 \cdot (3x + 2)^5 = log\ 100\,000 \rightarrow (x + 1)^5 \cdot (3x + 2)^5 = 10^5 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 1)(3x + 2) = 10 \rightarrow x = 1,\ x = -\frac{8}{3}$ no vàlida

Solució: $x = 1$

c) $log\ (8 + x^3) = 3 log\ (x + 2) \rightarrow log\ (8 + x^3) = log\ (x + 2)^3 \rightarrow (8 + x^3) = (x + 2)^3 \rightarrow$

$\rightarrow (8 + x^3) - (x + 2)^3 = 0 \rightarrow -6x^2 - 12x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = -2$ (no vàlida), $x = 0$

Solució: $x = 0$

d) $ln\ 6 + (x^2 - 5x + 7)\ ln\ 2 = ln\ 12$

$ln\ 6 \cdot 2^{x^2 - 5x + 7} = ln\ 12 \rightarrow 6 \cdot 2^{x^2 - 5x + 7} = 6 \cdot 2 \rightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 \rightarrow x = 3,\ x = 2$

Solucions: $x = 3,\ x = 2$

e) $(2x^2 + x - 3)\ log\ 5 = 2\ log \frac{1}{5} \rightarrow log\ 5^{2x^2 + x - 3} = log\ 5^{-2} \rightarrow 2x^2 + x - 3 = -2 \rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -1$

Solucions: $x = \frac{1}{2},\ x = -1$

f) $log\ (3^{1-x})^{1+x} + log\ 2700 = 2$

$log\ (3^{(1-x)(1+x)}) + log\ 27 + log\ 100 = 2 \rightarrow log\ (3^{(1-x)(1+x)}) + log\ 3^3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow log\ (3^{(1-x)(1+x)+3}) = log\ 1 \rightarrow 3^{(1-x)(1+x)+3} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (1 - x)(1 + x) + 3 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

Solucions: $x = -2,\ x = 2$

59 Resol per tempteig les equacions següents, sabent que tenen una solució en l'interval indicat:

a) $x^3 - x - 2 = 0$ **en** $[1, 2]$

b) $3x^3 + x^2 - 3 = 0$ **en** $[0, 1]$

a) $x \approx 1{,}5$

b) $x \approx 0{,}9$

60 **Resol les equacions següents mitjançant un canvi de variable:**

a) $\sqrt{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2+3}=-2\left(2+\frac{1}{x}\right)$ **b)** $e^{3x^2-3}-3e^{2x^2-2}+3e^{x^2-1}-1=0$ **c)** $\sqrt{\left(log\,\frac{2}{x}\right)^2+3}=-1+3\,log\,\frac{2}{x}$

a) $\sqrt{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2+3}=-2\left(2+\frac{1}{x}\right)$

Fem $2+\frac{1}{x}=y \rightarrow \sqrt{y^2+3}=-2y \rightarrow y^2+3=4y^2 \rightarrow 3y^2-3=0 \rightarrow y=1,\ y=-1$

$y=1 \rightarrow 2+\frac{1}{x}=1 \rightarrow x=-1$

$y=-1 \rightarrow 2+\frac{1}{x}=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$

Solucions: $x=-1,\ x=-\frac{1}{3}$

b) $e^{3x^2-3}-3e^{2x^2-2}+3e^{x^2-1}-1=0$

Fem el canvi de variable: $x^2-1=y$

$e^{3y}-3e^{2y}+3e^{y}-1=0$

Fem el canvi de variable: $e^y=t$

$t^3-3t^2+3t-1=0 \rightarrow t=1$

Desfem els canvis de variable:

$e^y=1 \rightarrow y=0$

$x^2-1=0 \rightarrow x=1,\ x=-1$

Solucions: $x=1,\ x=-1$

c) $\sqrt{\left(log\,\frac{2}{x}\right)^2+3}=-1+3\,log\,\frac{2}{x}$

Fem $log\,\frac{2}{x}=y$

$\sqrt{y^2+3}=-1+3y \rightarrow y^2+3=(-1+3y)^2=9y^2-6y+1 \rightarrow$

$\rightarrow y^2+3=9y^2-6y+1 \rightarrow y=1,\ y=-\frac{1}{4}$ no vàlida.

$log\,\frac{2}{x}=1=log\,10 \rightarrow \frac{2}{x}=10 \rightarrow x=\frac{1}{5}$

Solució: $x=\frac{1}{5}$

61 **Resol:**

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-5y=17 \\ 5x-2y=32 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+2y=1 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-y+z=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x-4y+6z=2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x-5y=17 \\ 5x-2y=32 \end{array}\right\}$ (1a) / (2a) – 2 · (1a) / (3a) – 5 · (1a) $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ -7y=7 \\ -7y=7 \end{array}\right\}$ (1a) / (2a) – 2 · (1a) $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ -7y=7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x=6 \\ y=-1 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=7 \\ 5x+2y=1 \\ 3x+3y=0 \end{array}\right\}$ (1a) / (2a) + 2 · (1a) / (3a) + 3 · (1a) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=7 \\ 9x=15 \\ 9x=21 \end{array}\right\}$

Hi ha dues equacions que es contradiuen. No hi ha solució.

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 8 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1a)\\(2a) - 2 \cdot (1a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 8 \\ 3y = -15 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 3 - z \\ y = -5 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1a)\\(2a) - 2 \cdot (1a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ 0 = 2 \end{array}\right\}$

Hi ha una equació impossible. No hi ha solució.

62 **Resol:**

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2y} \\ x + y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{4y+2x} = \sqrt{3y+x} - 1 \\ y + x = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x^3 - 3x^2 + 4)(y+1) = 0 \\ \sqrt{24 - x^3} = y + 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \sqrt{x-y} - \sqrt{x+y} = \sqrt{2y} \to \sqrt{8-2y} - \sqrt{8} = \sqrt{2y} \to \sqrt{8-2y} = \sqrt{8} + \sqrt{2y} \to 8 - 2y = (\sqrt{8} + \sqrt{2y})^2 \to \\ x + y = 8 \to x = 8 - y \end{cases}$

$\to 8 - 2y = 2y + 8\sqrt{y} + 8 \to 8\sqrt{y} = -4y \to 64y = 16y^2 \to y = 4,\ y = 0$

$y = 4 \to x = 4$
$y = 0 \to x = 8$

Solucions: $x_1 = 4,\ y_1 = 4;\ x_2 = 8,\ y_2 = 0$

b) $\begin{cases} \sqrt{4x+2y} = \sqrt{3y+x} - 1 \to \sqrt{-20-4y+2y} = \sqrt{3y-5-y} - 1 \to \sqrt{-20-24y} = \sqrt{2y-5} - 1 \to \\ y + x = -5 \to x = -5 - y \end{cases}$

$\to -20 - 24y = (\sqrt{2y-5} - 1)^2 \to -20 - 24y = 2y - 2\sqrt{2y-5} - 4 \to$

$\to \dfrac{-16 - 22y}{2} = \sqrt{2y-5} \to (-8 - 11y)^2 = 2y - 5 \to 121y^2 + 176y + 64 = 2y - 5 \to$

$\to 121y^2 + 176y + 64 - 2y + 5 = 0 \to 121y^2 + 174y + 69 = 0$ no té solució.

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \to x = -3 \text{ o } y = 5 \\ (x-2)(y-1) = 0 \to x = 2 \text{ o } y = 1 \end{cases}$

Per tant, les solucions són: $x_1 = 2,\ y_1 = 5;\ x_2 = -3,\ y_2 = 1.$

d) $\begin{cases} (x^3 - 3x^2 + 4)(y+1) = 0 \to (x^3 - 3x^2 + 4)(\sqrt{24 - x^3} - 6 + 1) = 0 \to (x^3 - 3x^2 + 4)(\sqrt{24 - x^3} - 5) = 0 \\ \sqrt{24 - x^3} = y + 6 \to y = \sqrt{24 - x^3} - 6 \end{cases}$

Cada factor s'iguala a zero.

$(x^3 - 3x^2 + 4) = 0 \to x = 2, x = -1$
$\sqrt{24 - x^3} - 5 = 0 \to x = -1$

$x = 2 \to y = -2$

$x = -1 \to y = -1$

Solucions: $x_1 = 2,\ y_1 = -2;\ x_2 = -1,\ y_2 = -1$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=5 \\ -\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=5xy \\ -\dfrac{(x+y)(x-y)}{xyxy}=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=5xy \\ -5\dfrac{(x-y)}{xy}=5 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x+y=5xy \rightarrow x+y=-5(x-y) \rightarrow 6x-4y=0 \rightarrow x=\dfrac{4y}{6} \\ -(x-y)=xy \rightarrow -\dfrac{4y}{6}+y=\dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y}{6}y \rightarrow \dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y^2}{6} \rightarrow y=2y^2 \rightarrow y=\dfrac{1}{2},\ y=0 \text{ no vàlida} \end{cases}$

$y=\dfrac{1}{2} \rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Solució: $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{1}{2}$

f) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy(x+y)=6 \\ \dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Multipliquem les equacions i ens queda: $(x+y)^2=9$

De la segona equació:

$y+x=\dfrac{3}{2}xy \rightarrow y-\dfrac{3}{2}xy=-x \rightarrow y\left(1-\dfrac{3}{2}x\right)=-x \rightarrow y=\dfrac{-x}{1-\dfrac{3}{2}x} \rightarrow y=\dfrac{-2x}{2-3x}$

Ens queda el sistema següent:

$\begin{cases} (x+y)^2=9 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases}$

Obtenim els dos sistemes següents:

$\begin{cases} x+y=3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \rightarrow [x=1,\ y=2];\ [x=2,\ y=1]$

$\begin{cases} x+y=-3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \rightarrow \left[x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\ \left[x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

Solucions: $[x=1,\ y=2],\ [x=2,\ y=1],\ \left[x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\ \left[x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

63 Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases}$

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^{1/2}=\sqrt{x} \\ x^2=y^2 \end{cases} \rightarrow y=x,\ y\geq 0,\ x\geq 0$

b) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log(x+y)(x-y)=\log 5 \\ e^x=ee^y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)=5 \rightarrow \\ x=y+1 \end{cases}$

$\rightarrow (y+1)^2-y^2=2y+1=5 \rightarrow 2y+1=5 \rightarrow y=2$

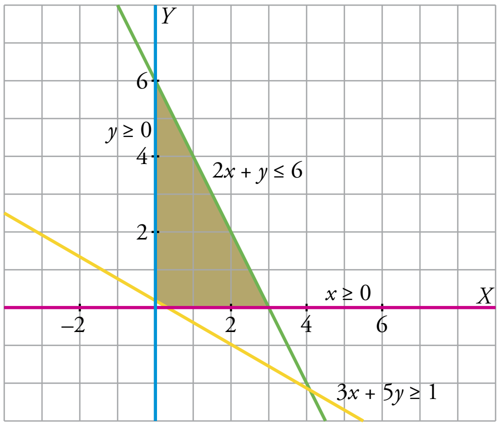
$y=2 \rightarrow x=3$

Solució: $x=3,\ y=2$

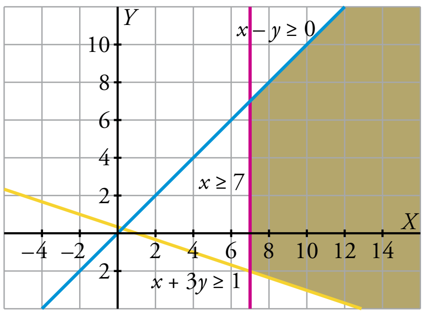
64 **Representa gràficament el conjunt de solucions d'aquests sistemes d'inequacions:**

a) $\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ 3x + 5y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y \geq 1 \\ x \geq 7 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$

a) La regió intersecció és:



b)



65 **Resol:** $\dfrac{2x + 4}{x - 1} \geq 0$

Després, dedueix la solució d'aquestes altres inequacions:

a) $\dfrac{2x + 4}{x - 1} < 0$

b) $\dfrac{2x + 4}{x - 1} \leq 0$

	$(-\infty, -2]$	$[-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$2x + 4$	–	+	+
$x - 1$	–	–	+
$\dfrac{2x + 4}{x - 1}$	+	–	+

$\dfrac{2x + 4}{x - 1} \geq 0$ en $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

a) *Solució:* $(-2, 1)$

b) *Solució:* $[-2, 1)$

66 **Resol les inequacions següents:**

a) $x^4 - 4x^2 < 0$ **b)** $x^3 - x^2 - 6x < 0$ **c)** $\dfrac{4-x^2}{(x-3)^2} > 0$ **d)** $\dfrac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2-4) < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

$x \neq 0$

$(-2, 0) \cup (0, 2)$

b) $x(x^2 - x - 6) < 0$

$x(x-3)(x+2) < 0$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left.\begin{array}{r} x \neq 3 \\ 4 - x^2 > 0 \end{array}\right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1;\ (1, +\infty)$

Página 99

Qüestions teòriques

67 **Quins valors ha de prendre el paràmetre k perquè $x^2 - 6x + k = 0$ no tingui solucions reals?**

$36 - 4k < 0;\ 36 < 4k;\ 9 > k;\ k > 9$

68 **Troba m perquè, en dividir el polinomi $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$ entre $x + 4$, el residu sigui igual a 12.**

	2	9	2	–6	m
–4		–8	–4	8	–8
	2	1	–2	2	$m - 8$

$m - 8 = 12 \rightarrow m = 20$

69 **Escriu un polinomi de grau 4 que només tingui per arrels 0 i 1.**

Per exemple: $P(x) = x^3(x-1);\ Q(x) = x^2(x-1)$

70 **Justifica per què aquest sistema d'equacions no pot tenir solució:**

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

La primera i la tercera equació es contradiuen.

71 **Inventa equacions que tinguin per solucions els valors següents:**

a) $3,\ -3,\ \sqrt{7}$ **y** $-\sqrt{7}$

b) $5;\ 0{,}3$ **y** -2

c) $0,\ \dfrac{1}{2}$ **y** $0{,}7$

d) $0,\ 1, -1$ **y** $\dfrac{1}{3}$

a) $(x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = (x^2-9)(x^2-7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x-5)(x-0{,}3)(x+2) = x^3 - 3{,}3x^2 - 9{,}1x + 3$

c) $x\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 0{,}7) = x(x-0{,}5)(x-0{,}7) = x^3 - 1{,}2x^2 + 0{,}35x$

d) $x(x-1)(x+1)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}x$

Per aprofundir

72 **Resol aquestes equacions de segon grau en què la incògnita és x:**

a) $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$

b) $(x-a)^2 - 2x(x+a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a+b)x^2 + bx - a = 0$

a) $x = \dfrac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2ab} = \dfrac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2+2ab-4ab}}{2ab} =$

$$= \frac{a+b \pm (a-b)}{2ab} = \begin{cases} \dfrac{a+b+a-b}{2ab} = \dfrac{2a}{2ab} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{a+b-a+b}{2ab} = \dfrac{2b}{2ab} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{a};\ x_2 = \dfrac{1}{b}$

b) $x^2 + a^2 - 2ax - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$

$x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$

$x = \dfrac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = \dfrac{-4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \dfrac{-4a \pm 2a}{2} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4+2a}{2} = \dfrac{-2a}{2} = -a \\ \dfrac{-4a-2a}{2} = \dfrac{-6a}{2} = -3a \end{cases}$$

$x_1 = -a;\ x_2 = -3a$

c) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b-a)}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} =$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a-b)^2}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b+2a-b}{2a} = \dfrac{2a-2b}{2a} = \dfrac{a-b}{a} \\ \dfrac{-b-2a+b}{2a} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{a-b}{a}$

d) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2(a+b)} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2(a+b)} = \dfrac{-b \pm (2a+b)}{2(a+b)} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{-b+2a+b}{2(a+b)} = \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{-b-2a-b}{2(a+b)} = \dfrac{-(2a+2b)}{2(a+b)} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{a}{a+b}$

73 **Resol:**

a) $|x| + 1 = |3x - 5|$

b) $|x^2 - 1| = |x| - 1$

a)

	$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x\| + 1$	$-x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\|3x - 5\|$	$-3x + 5$	$-3x + 5$	$3x - 5$

$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$-x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = 3x - 5$
$x = 2 \notin (-\infty, 0)$	$x = 1 \in \left[0, \frac{5}{3}\right)$	$x = 3 \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

Solucions: $x = 1,\ x = 3$

b)

	$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$\|x^2 - 1\|$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x	x
$\|x\| - 1$	$-x - 1$	$-x - 1$	$x - 1$	$x - 1$

$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$x^2 - 1 = -x - 1$	$1 - x^2 = -x - 1$	$1 - x^2 = x - 1$	$x^2 - 1 = x - 1$
$x = -1 \notin (-\infty, -1)$	$x = -1 \in [-1, 0)$	$x = 1 \notin [0, 1)$	$x = 1 \in [1, +\infty)$
$x = 0 \notin (-\infty, -1)$	$x = 2 \notin [-1, 0)$	$x = -2 \notin [0, 1)$	$x = 0 \notin [1, +\infty)$

Solucions: $x = -1,\ x = 1$

74 **Resol les inequacions següents:**

a) $\frac{2x+1}{x+1} > 1$ **b)** $\frac{x-1}{x+3} \ge x$ **c)** $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1}$ **d)** $\frac{1}{x+2} \le \frac{x}{x+2}$

a) $\frac{2x+1}{x+1} > 1 \rightarrow \frac{2x+1}{x+1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x}{x+1} > 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, +\infty)$
x	–	–	+
$x + 1$	–	+	+
$\frac{x}{x+1}$	+	–	+

Solució: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

b) $\frac{x-1}{x+3} \ge x \rightarrow \frac{x-1}{x+3} - x \ge 0 \rightarrow -\frac{(x+1)^2}{x+3} \ge 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{x+3} \le 0$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1]$	$[-1, +\infty)$
$(x + 1)^2$	+	+	+
$x + 3$	–	+	+
$\frac{(x+1)^2}{x+3}$	–	+	+

Solució: $(-\infty, -3)$

c) $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x-1}{x+1} \rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} < 0 \rightarrow 4\dfrac{x}{x^2-1} < 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, 1)$	$(-1, +\infty)$
x	–	–	+	+
x^2-1	+	–	–	+
$\dfrac{x}{x^2-1}$	–	+	–	+

Solució: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

d) $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{x}{x+2} \rightarrow \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x}{x+2} \leq 0 \rightarrow \dfrac{1-x}{x+2} \leq 0$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1]$	$[1, +\infty)$
$1-x$	+	+	–
$x+2$	–	+	+
$\dfrac{1-x}{x+2}$	–	+	–

Solució: $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

75 **Un atuell conté una mescla d'alcohol i aigua en una proporció de 3 a 7. En un altre atuell la proporció és de 2 a 3. Quants cassons hem de treure de cada atuell per obtenir 12 cassons d'una mescla en què la proporció alcohol-aigua sigui de 3 a 5?**

x cassons V_1	$(12-x)$ cassons V_2	12 cassons
3 alcohol 7 aigua	2 alcohol 3 aigua	3 alcohol 5 aigua
$\dfrac{3}{10}$ alcohol	$\dfrac{2}{5}$ alcohol	$\dfrac{3}{8}$ alcohol

La proporció d'alcohol és:

$$\frac{3}{10}x + (12-x)\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{8}\cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{24-2x}{5} = \frac{9}{2};\ 3x + 48 - 4x = 45;\ x = 3$$

Solució: 3 cassons de la primera i 9 de la segona.

Autoavaluació

Pàgina 99

1 Resol factoritzant prèviament.

$$\boldsymbol{3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0}$$

$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$

$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 1 & -9 & -9 & -2 \\
-1 & & -3 & 2 & 7 & 2 \\
\hline
 & 3 & -2 & -7 & -2 & \boxed{0} \\
2 & & 6 & 8 & 2 & \\
\hline
 & 3 & 4 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

L'equació factoritzada queda així:

$$x(x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) = 0$$

Les solucions són: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_4 = 2$

2 Opera i simplifica el resultat.

$$\boldsymbol{\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}}$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2 - x(x-1)}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1} =$$

$$= \frac{(x^2 - x^2 + x)(x-1)}{3x(x^2-1)} : \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)\,3x} = \frac{1}{3(x+1)}$$

3 Resol les equacions següents:

a) $\boldsymbol{x^4 - 3x^2 + 2 = 0}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{8+2x} - x = x + 6}$

c) $\boldsymbol{\frac{3x}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} - \frac{4}{3}}$

d) $\boldsymbol{3^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

e) $\boldsymbol{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0}$

f) $\boldsymbol{\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x+1)}$

g) $\boldsymbol{|3x + 1| = |x - 3|}$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Fem el canvi $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Les solucions són: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

b) $\sqrt{8+2x}-x=x+6 \rightarrow \sqrt{8+2x}=2x+6$

Elevem al quadrat ambdós membres.

$$(\sqrt{8+2x})^2=(2x+6)^2 \rightarrow 8+2x=4x^2+36+24x \rightarrow$$
$$\rightarrow 4x^2+22x+28=0 \rightarrow 2x^2+11x+14=0$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-112}}{4}=\frac{-11\pm 3}{4}= \begin{cases} -2 \\ -7/2 \end{cases}$$

Comprovada l'equació inicial, el resultat $-\frac{7}{2}$ resulta no ser vàlid.

Per tant, la solució de l'equació és $x=-2$.

c) $\frac{3x}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}-\frac{4}{3} \rightarrow \frac{9x}{3(x^2-4)}=\frac{3x(x-2)-4(x^2-4)}{3(x^2-4)} \rightarrow$

$$\rightarrow 9x=3x^2-6x-4x^2+16 \rightarrow x^2+15x-16=0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x=\frac{-15\pm\sqrt{225+64}}{4}=\frac{-15\pm 17}{2}= \begin{cases} 1 \\ -16 \end{cases}$$

Solucions: $x_1=1;\ x_2=-16$

d) $3^{x-1}=\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 3^{x-1}=3^{-1/2} \rightarrow x-1=-\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{1}{2}$

e) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0 \rightarrow (2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

Fem el canvi $y=2^x$, amb la qual cosa obtenim:

$$y^2-6y+8=0 \rightarrow y=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}= \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$y=4 \rightarrow 2^x=4 \rightarrow 2^x=2^2 \rightarrow x=2$

$y=2 \rightarrow 2^x=2 \rightarrow 2^x=2^1 \rightarrow x=1$

Solucions: $x_1=1;\ x_2=2$

f) $ln\,x+ln\,4=2\,ln\,(x+1) \rightarrow ln\,4x=ln\,(x+1)^2 \rightarrow 4x=(x+1)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1$$

Solució: $x=1$

g) $|3x+1|=|x-3| \begin{cases} 3x+1=x-3 \rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-2 \\ 3x+1=-(x-3) \rightarrow 4x=2 \rightarrow x=1/2 \end{cases}$

Solucions: $x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{2}$

4 Resol aquests sistemes no lineals:

a) $\begin{cases} xy-x^2=6 \\ x+y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ 2x^2-y^2-xy=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy-x^2=6 \rightarrow x(7-x)-x^2=6 \rightarrow x(7-x)-x^2-6=0 \rightarrow -2x^2+7x-6=0 \rightarrow x=2,\ x=\frac{3}{2} \\ x+y=7 \rightarrow y=7-x \end{cases}$

$x=2 \rightarrow y=5$

$x=\frac{3}{2} \rightarrow y=\frac{11}{2}$

Solucions: $x_1=2,\ y_1=5;\ x_2=\frac{3}{2},\ y_2=\frac{11}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+xy=1 \\ 2x^2+y^2-xy=2 \end{array}\right\} \xrightarrow[(1a)+(2a)]{(1a)} \left.\begin{array}{r} x^2+y^2+xy=1 \\ 3x^2 \qquad\qquad =3 \end{array}\right\} \rightarrow x=-1$

$x=1 \rightarrow y^2+y=0 \rightarrow y=0,\ y=1 \rightarrow$ *Solucions:* $x_1=1,\ y_1=1;\ x_2=1,\ y_2=0$

$x=0 \rightarrow y^2=1 \rightarrow y=1,\ y=-1 \rightarrow$ *Solucions:* $x_3=0,\ y_3=1;\ x_4=0,\ y_4=-1$

5 Resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} y-2x=0 \\ 3^y-6\cdot 3^x=-9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}=y+2 \\ \log 5x-\log y=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x+y+3z=0 \\ -2x+3y+3z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y-z=8 \\ 3x \qquad -2z=0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y-2x=0 \\ 3^y-6\cdot 3^x=-9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=2x \\ 3^{2x}-6\cdot 3^x=-9 \end{array}\right\}$

Fem el canvi $3^x=z$:

$z^2-6z+9=0 \rightarrow z=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$

$3^x=3 \rightarrow x=1$

$x=1 \rightarrow y=2$

Solució: $x=1,\ y=2$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}=y+2 \\ \log 5x-\log y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+5=(y+2)^2 \\ \log\dfrac{5x}{y}=\log 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+5=y^2+4y+4 \rightarrow 4y^2+5=y^2+4y+4 \rightarrow y=1,\ y=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x}{y}=10 \rightarrow x=2y \end{cases}$

$y=1 \rightarrow x=2$

$y=\dfrac{1}{3} \rightarrow x=\dfrac{2}{3}$

Solucions: $x_1=2,\ y_1=1;\ x_2=\dfrac{2}{3},\ y_2=\dfrac{1}{3}$

c) $\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=3 \\ x+y+3z=0 \\ -2x+3y+3z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)+2\cdot(1a) \end{array} \left.\begin{array}{r} x+2y+2z=3 \\ -y+z=-3 \\ 7y+7z=7 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a)+7\cdot(2a) \end{array} \left.\begin{array}{r} x+2y+2z=3 \\ -y+z=-3 \\ 14z=-14 \end{array}\right\}$

$14z=-14 \rightarrow z=-1$

$-y+z=-3 \rightarrow -y-1=-3 \rightarrow y=2$

$x+2y+2z=3 \rightarrow x+4-2=3 \rightarrow x=1$

Solució: $x=1,\ y=2,\ z=-1$

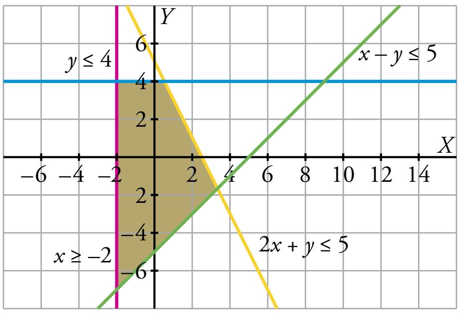
d) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ 2x-y-z=8 \\ 3x-\quad -2z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-2\cdot(1a) \\ (3a)-3\cdot(1a) \end{array} \left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ -3y+z=2 \\ -3y+z=9 \end{array}\right\}$

Les dues últimes files es contradiuen; per tant no hi ha solució.

6 **Resol aquests sistemes d'inequacions:**

a) $\begin{cases} 2x + y \le 5 \\ x - y \le 5 \\ y \le 4 \\ x \ge -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases}$

a)



La solució és el quadrilàter assenyalat.

b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \rightarrow \text{Solución } [-2, 3] \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \rightarrow \text{Solución } [1, \infty) \end{cases}$

Solució: $x \in [1, 3]$

7 **Resol:**

a) $x(x-1) - 2(x+2) < x(x+1)$ **b)** $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x+3} \ge 0$

a) $x(x-1) - 2(x+2) < x(x+1) \rightarrow x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \rightarrow$

$\rightarrow -4x - 4 < 0 \rightarrow 4x > -4 \rightarrow x > -1$

Solució: $x \in (-1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x+3} \ge 0$

Perquè un quocient sigui positiu, el numerador i el denominador han de tenir el mateix signe.

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \rightarrow (x+1)^2 \ge 0$ per a qualsevol valor de x.

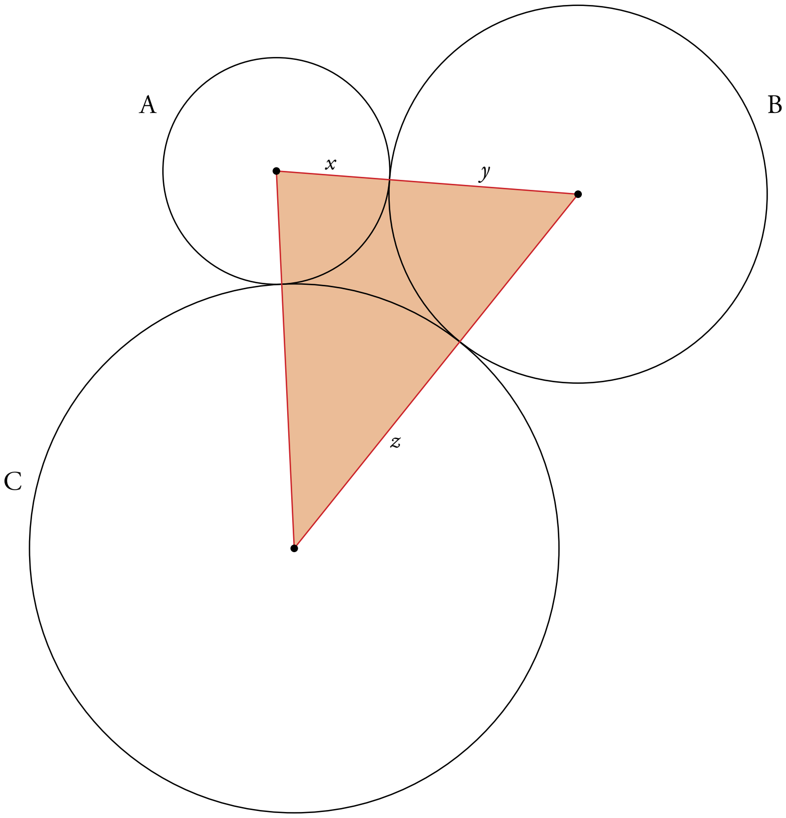
Per a $x = -3$, l'equació no té solució, ja que el denominador esdevé zero.

Mirem on és $x + 3$ positiu.

$x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$

Solució: $x \in (-3, +\infty)$

8 **Un circ està compost per tres pistes circulars tangents dues a dues. Les distàncies entre els centres són 80, 100 i 120 metres, respectivament. Calcula el diàmetre de cada una de les pistes.**



Anomenem x el radi de la pista A.

Anomenem y el radi de la pista B.

Anomenem z el radi de la pista C.

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x + z = 100 \\ y + z = 120 \end{cases}$$

Solució: $x = 30,\ y = 50,\ z = 70$

La pista A té 60 m de diàmetre; la pista B té 100 m de diàmetre i la pista C té 140 m de diàmetre.